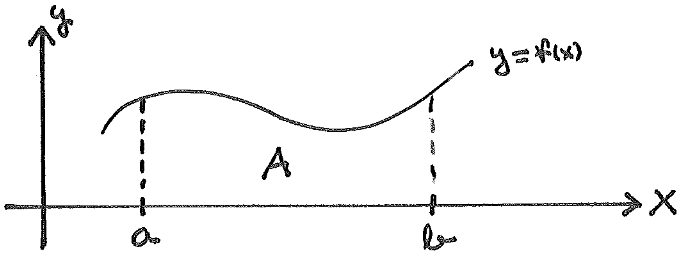
5 Integraler

5.1 Definitioner och räkneregler

Antag att vi har en begränsad och positiv funktion på ett slutet (ändligt) intervall $[a, b]$.



Vi ställer oss frågan: Vilket är ett lämpligt mått på arean A av området som begränsas av x-axeln, grafen $y = f(x)$ samt linjerna $x = a$ och $x = b$?

Antag nu att $f(x)$ är begränsad på $[a, b]$ och att detta intervall delas in i n delar med delningspunkterna

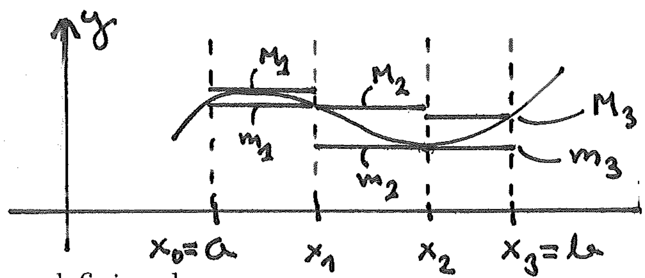
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Vi inför beteckningarna

$$d_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \text{och} \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

för det k:te delintervallet och dess längd.

Då $f(x)$ är begränsad på intervallet d_k finns det ett entydigt bestämt minsta tal M_k (största tal m_k) sådant att $f(x) \leq M_k$ ($f(x) \geq m_k$) på d_k. Detta tal kallas supremum (infimum) av $f(x)$ på d_k. Om $f(x)$ är kontinuerlig sammanfaller M_k (m_k) med maximivärdet (minimivärdet) av $f(x)$ på d_k.



Summorna S_n och s_n definierade av

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} M_j\, \Delta x_j \quad \text{och} \quad s_n = \sum_{j=1}^{n} m_j\, \Delta x_j$$

kallas en **översumma** respektive en **undersumma** till $f(x)$ på $[a, b]$. Det är naturligt att uppfatta S_n och s_n som en överskattning respektive underskattning av arean A i de fall $f(x) \geq 0$ på $[a, b]$.

Om vi har en översumma S_n svarande mot en indelning $\{x_j\}_{j=0}^n$ och en undersumma s_m svarande mot en annan indelning $\{\overline{x}_j\}_{j=0}^m$ så gäller det att

$$s_m \leq S_n,$$

ty om vi bildar en ny förfinad indelning $\{\tilde{x}_j\}_{j=0}^p$ sådan att alla intervalländpunkter x_j och $\overline{x}_j$ ingår i denna får vi att

$$s_m \leq s_p \leq S_p \leq S_n .$$

Vi har alltså att mängden av alla översummor (undersummor) svarande mot alla tänkbara ändliga indelningar av $[a, b]$ är nedåt begränsad (uppåt begränsad) av en godtyckligt vald undersumma (översumma). Då existerar det ett entydigt bestämt största tal $M(f)$ sådant att $M(f) \leq S_n$ och ett entydigt bestämt minsta tal $m(f)$ sådant att $s_n \leq m(f)$ för alla ändliga indelningar av $[a, b]$, med andra ord

$$M(f) = \inf\{S_n\} \quad \text{och} \quad m(f) = \sup\{s_n\} . \tag{5.1}$$

Nu kan vi definiera vad som avses med att $f(x)$ är integrerbar över $[a, b]$ och vad som avses med integralen av $f(x)$ över $[a, b]$.

Definition 5.1. Antag att $f(x)$ är en begränsad funktion på det ändliga intervallet $[a, b]$. Om

$$m(f) = M(f) =: I(f) ,$$

säger vi att funktionen $f(x)$ är **(Riemann)integrerbar** över $[a, b]$. Talet $I(f)$ kallas **integralen av** $f(x)$ **över** $[a, b]$ och betecknas

$$\int_a^b f(x)\, dx . \tag{5.2}$$

(Vilket utläses: Integralen från a till b av $f(x)\, dx$.) Om $f(x)$ är integrerbar över $[a, b]$ så definieras

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{och} \quad \int_a^a f(x)\, dx := 0 . \tag{5.3}$$

Om $f(x) \geq 0$ och integrerbar över $[a, b]$ definieras arean A i den inledande frågan i detta avsnitt genom

$$A := I(f) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Exempel 5.1. Det finns begränsade funktioner som inte är integrerbara. Om vi på intervallet $[0, 1]$ definierar $f(x)$ genom

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{om } x \text{ är ett rationellt tal,} \\ 0\,, & \text{om } x \text{ är ett irrationellt tal,} \end{cases}$$

så gäller

$$s_n = 0 \quad \text{och} \quad S_n = 1$$

för alla ändliga indelningar av $[0, 1]$, så $f(x)$ är inte integrerbar över $[0, 1]$.

För kontinuerliga funktioner har vi dock följande viktiga resultat (vars bevis kräver förtrogenhet med begreppet likformig kontinuitet som behandlas i kursen Analys I).

Sats 5.1. Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på det ändliga slutna intervallet $[a, b]$, så är $f(x)$ integrerbar över $[a, b]$.

Vi kommer senare att se att en kontinuerlig funktion på ett öppet eller halvöppet ändligt intervall inte behöver vara integrerbar.

Exempel 5.2. Betrakta den kontinuerliga funktionen $f(x) = x$ på intervallet $[0, 1]$. Sats 5.1 ger att den är integrerbar. Vi skall bestämma integralen $I(f)$ med hjälp av över- och undersummor och gör den ekvidistanta indelningen

$$x_k = \frac{k}{n}\,, \qquad k = 0, \ldots, n\,.$$

Då har vi att

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} \quad \text{och} \quad M_k = \frac{k}{n}\,,\ m_k = \frac{k-1}{n}\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,.$$

Vi erhåller över- och undersummorna

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\,,$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\,.$$

Eftersom $s_n \leq I(f) \leq S_n$ för alla n gäller

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq I(f) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

för alla n, så vi drar slutsatsen att

$$I(f) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Antag nu att $f(x)$ är kontinuerlig på det ändliga slutna intervallet $[a, b]$ med integralen $I(f)$. Vi bildar en följd $\{\Delta_n\}$ av allt finare indelningar

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

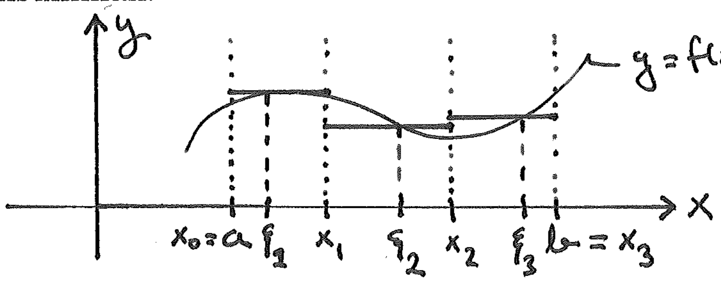
av intervallet $[a, b]$, med egenskapen att

$$\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \to 0, \quad \text{då } n \to \infty.$$

För varje indelning Δ_n väljer vi godtyckligt talen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ och definerar summan

$$R(\Delta_n) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j, \tag{5.4}$$

som kallas **Riemannsumman**.



Vi har då följande resultat för kontinuerliga funktioner:

Sats 5.2. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på det ändliga slutna intervallet $[a, b]$. Då gäller

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j. \tag{5.5}$$

Bevis: Definitionen av $R(\Delta_n)$ ger att

$$s_n \leq R(\Delta_n) \leq S_n$$

för alla n. Å andra sidan har vi, på grund av konstruktionen av följden $\{\Delta_n\}$ av allt finare indelningar, att

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = I(f)\,,$$

så vi drar slutsatsen att $R(\Delta_n) \to I(f)$ då $n \to \infty$. □

Valet av beteckningen $\int_a^b f(x)\,dx$ kan motiveras med formel (5.5), löst uttryckt: $f(x)\,dx$ svarar mot $f(\xi_j)\,\Delta x_j$ och $\int_a^b$ mot $\sum_{j=1}^n$ då vi låter $n \to \infty$.

Exempel 5.3. Beräkna $\int_a^b k\,dx$, där k är en konstant, dvs $f(x) = k$ på $[a, b]$. Med stöd av Sats 5.2 får vi att

$$\begin{aligned}\int_a^b k\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\,\Delta x_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n k\,\Delta x_j = \lim_{n\to\infty} k \sum_{j=1}^n \Delta x_j \\ &= \lim_{n\to\infty} k\,(b-a) = k(b-a)\,.\end{aligned}$$

Följande sats med räkneregler för integraler ges utan bevis.

Sats 5.3. Antag att de på det slutna och ändliga intervallet $[a, b]$ begränsade funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är integrerbara. Då gäller:

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx\,, \quad k \text{ konstant}\,, \tag{5.6}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,, \tag{5.7}$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ på } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,, \tag{5.8}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,, \quad a \leq c \leq b\,. \tag{5.9}$$

Ett viktigt specialfall av formel (5.8) är då $f(x) \equiv 0$,

$$g(x) \geq 0 \text{ på } [a, b] \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0\,. \tag{5.10}$$

5.2 Kopplingen mellan integral och primitiv funktion

En **begränsad** funktion på det slutna ändliga intervallet $[a, b]$ är **styckevis kontinuerlig** om den är kontinuerlig på $[a, b]$ utom i ett ändligt antal punkter där den har språng. För dylika funktioner gäller följande resultat

Sats 5.4. Om funktionen $f(x)$ är styckevis kontinuerlig på det ändliga slutna intervallet $[a, b]$, så är den integrerbar över $[a, b]$ och

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \tag{5.11}$$

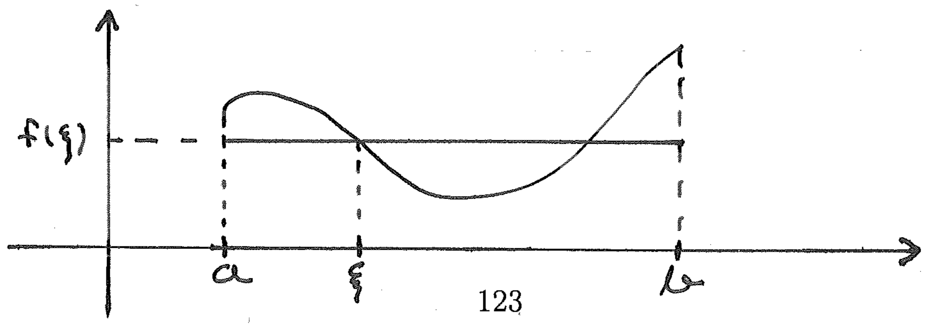
Bevis. 1. Vi kan indela $[a, b]$ i n stycken slutna delintervall $I_1, \ldots, I_n$ på vilka $f(x)$ är kontinuerlig (förutom eventuella språng i intervalländpunkter) och därmed integrerbar med integralerna $I_1(f), \ldots, I_n(f)$. Detta betyder att för varje $\varepsilon > 0$ kan vi konstruera en indelning av hela intervallet $[a, b]$ så att indelningen innehåller alla intervalländpunkter för $I_1, ..., I_n$ och så att för över- respektive undersummorna S_i och s_i på intervallet I_i, $i = 1, \ldots, n$, gäller att $S_i - s_i < \frac{\varepsilon}{n}$. För $S = \sum_{i=1}^n S_i$ och $s = \sum_{i=1}^n s_i$, som är över- och undersumma på $[a, b]$ gäller $S - s < \varepsilon$, så f är integrerbar över $[a, b]$ med $I(f) = I_1(f) + \ldots + I_n(f)$.

2. Funktionen $|f(x)|$ är också stykevis kontinuerlig på $[a, b]$ så den är integerebar över $[a, b]$. Nu gäller $f(x) \leq |f(x)|$ och $-f(x) \leq |f(x)|$ på $[a, b]$, så med stöd av formel (5.8) fås att

$$\pm \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Ett av vänsterleden sammanfaller med vänsterledet i (5.11). □

För en kontinuerlig positiv funktion $f(x)$ på ett ändligt slutet intervall $[a, b]$ verkar det klart att det finns ett $\xi \in [a, b]$ så att rektangelarean $f(\xi)(b - a)$ sammanfaller med arean av ytan mellan x-axeln och $y = f(x)$.



Vi formulerar **integralkalkylens medelvärdessats**:

Sats 5.5. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna ändliga intervallet $[a,b]$. Då finns det ett $\xi \in [a,b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)\,. \tag{5.12}$$

Bevis: Då $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ kan vi definiera

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{och} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Med stöd av att $m \leq f(x) \leq M$ på $[a,b]$, Exempel 5.3 och formel (5.8) gäller

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)\,.$$

Definiera

$$C = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\,.$$

Då gäller: $m \leq C \leq M$. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ ger satsen om mellanliggande värden, Sats 2.7, att det finns ett $\xi \in [a,b]$ sådant att $f(\xi) = C$. $\square$

Man kan också bevisa följande generalisering av medelvärdessatsen:

Sats 5.6. (Generaliserade medelvärdessatsen). Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga och att $g(x) \geq 0$ på det slutna ändliga intervallet $[a,b]$. Då finns det ett $\xi \in [a,b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{5.13}$$

Exempel 5.4. Bestäm gränsvärdet för talföljden

$$a_n = \int_n^{n+2} x \sin\frac{1}{x}\,dx\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Följande sats, **analysens huvudsats**, ger kopplingen mellan integral och primitiv funktion.

Sats 5.7. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna ändliga intervallet $[a, b]$ och definiera funktionen $S(x)$ genom

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad x \in [a, b]\,. \tag{5.14}$$

Då är $S(x)$ en primitiv funktion till $f(x)$ på $[a, b]$,

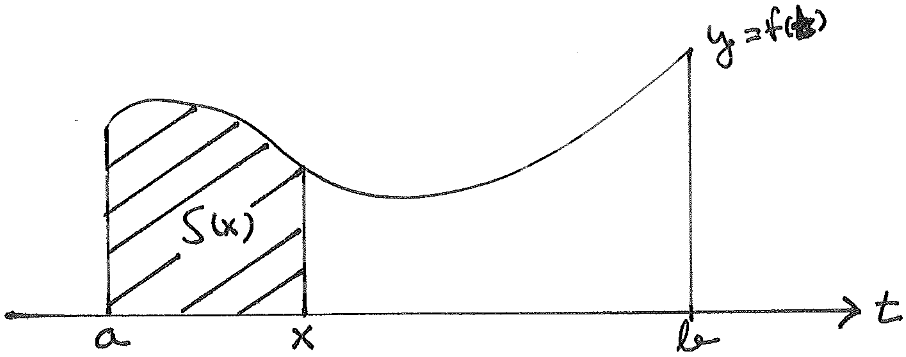
$$S'(x) = f(x)\,, \quad x \in [a, b]\,. \tag{5.15}$$

Bevis: Tag godtyckligt $x_0 \in [a, b]$, bilda differenskvoten för $S(x)$ i x_0 och tillämpa Sats 5.5 formel (5.12),

$$\begin{aligned}
\frac{S(x_0 + h) - S(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\Big) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} f(\xi_h)\,(x_0 + h - x_0) \\
&= f(\xi_h)\,,
\end{aligned}$$

där ξ_h ligger mellan punkterna x_0 och $x_0 + h$. Då $h \to 0$ har vi att $\xi_h \to x_0$ och eftersom $f(x)$ är kontinuerlig i punkten x_0 gäller det att $f(\xi_h) \to f(x_0)$, vilket betyder att differenskvoten har gränsvärdet $S'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Geometriskt, för en positiv funktion $f(x)$ på $[a, b]$ kan $S(x_0)$ för $a < x_0 \leq b$ tolkas som ytan mellan x-axeln, $y = f(x)$ samt linjerna $x = a$ och $x = x_0$.



En konsekvens av Sats 5.7 är att en funktion $f(x)$ som är kontinuerlig på ett ändligt intervall $[a,b]$ har en primitiv funktion på intervallet. En annan konsekvens är att

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,, \quad x \in [a,b]\,.$$

Exempel 5.5. För att beräkna $f'(t)$ av funktionen

$$f(t) = \int_0^{\ln t} e^{u^2}\,du\,, \quad t > 1\,,$$

ansätter vi

$$S(x) = \int_0^x e^{u^2}\,du\,,$$

varvid $f(t)$ kan tolkas som den sammansatta funktionen $f(t) = S(x(t))$, där $x = x(t) = \ln t$. Då ger kedjeregeln att

$$f'(t) = S'(x(t))\,x'(t) = e^{x(t)^2}\,\frac{1}{t} = e^{\ln^2 t}\,\frac{1}{t} = \frac{t^{\ln t}}{t} = t^{\ln t - 1}\,, \quad t > 1\,.$$

Följande sats ger ett behändigt sätt att beräkna integraler.

Sats 5.8. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på det ändliga slutna intervallet $[a,b]$ och att $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$. Då gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{5.16}$$

Bevis: Sats 5.7 ger att funktionen

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad x \in [a,b]\,,$$

är en primitiv funktion till $f(x)$ på $[a,b]$. Då har vi att

$$S(x) = F(x) + C$$

för någon konstant C. Då $S(a) = 0$ får vi att $C = -F(a)$. Med andra ord erhåller vi att

$$\int_a^b f(t)\,dt = S(b) = F(b) - F(a)\,. \quad \square$$

Differensen $F(b) - F(a)$ betecknas ofta $[F(x)]_a^b$ och utläses: "insättning från a till b i $F(x)$".

Exempel 5.6. Beräkna och tolka geometriskt integralerna

$$(a) \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\,, \qquad (b) \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx\,.$$

Exempel 5.7. Beräkna arean som begränsas av x-axeln och grafen av

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}\,, \quad -1 \le x \le 1\,.$$

5.3 Partiell integration och variabelsubstitution

Formeln för partiell integrering ges i följande sats:

Sats 5.9. **(Partiell integration.)** Antag att $f(x)$ och $g'(x)$ är kontinuerliga i det slutna ändliga intervallet $[a,b]$. Då gäller

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx\,. \tag{5.17}$$

Bevis: Sätt $H(x) = \int F(x)\,g'(x)\,dx$. Då är $F(x)g(x) - H(x)$ en primitiv funktion till $f(x)g(x)$. Med stöd av Sats 5.8 fås att

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx &= \Big[F(x)g(x) - H(x)\Big]_a^b \\
&= F(b)g(b) - H(b) - (F(a)g(a) - H(a)) \\
&= \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - (H(b) - H(a)) \\
&= \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Exempel 5.8. Beräkna integralen

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx\,.$$

Antag att $F'(x) = f(x)$ och att $g(x)$ är deriverbar. På sida 107 härledde vi formeln $(*)$ för substitution i en obestämd integral,

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\,.$$

Antag vidare att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och att $f(g(t))$ samt $g'(t)$ är kontinuerliga på $[\alpha,\beta]$, där $a = g(\alpha)$ och $b = g(\beta)$. Vi får med stöd av Sats 5.8 substitutionsformeln:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt = \Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta\,, \quad a = g(\alpha)\ ,\ b = g(\beta)\,. \tag{5.18}$$

Tolkning: Antag att vi vill beräkna

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

1. Vi utför substitutionen $x = g(t)$ och byter ut dx mot $g'(t)\,dt$.
2. Nya integrationsgränser α och β bestäms så att $g(\alpha) = a$ och $g(\beta) = b$.
3. Beräknar en primitiv funktion $F(g(t))$ till $f(g(t))\,g'(t)$ och utför insättningen $[F(g(t))]_\alpha^\beta$.

Notera att man inte behöver "gå tillbaka" till variabeln x efter att man bestämt en primitiv $F(g(t))$ till $f(g(t))\,g'(t)$.

Exempel 5.9. Beräkna integralerna

$$(a)\ \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\,, \qquad (b)\ \int_0^1 \arctan(\sqrt{x})\,dx\,.$$

5.4 Generaliserade integraler

Integralbegreppet kan generaliseras att omfatta: 1) Integraler med **oändligt intergrationsintervall**, ($a = -\infty$ och/eller $b = \infty$). 2) Integraler med **obegränsad integrand**.

Definition 5.2. Antag att funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på intervallen $[a, +\infty[$ respektive $]-\infty, b]$. Om vi har ändliga gränsvärden A och B givna av

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt = A \quad \text{och} \quad \lim_{x \to -\infty} \int_x^b g(t)\,dt = B\,, \tag{5.19}$$

säger vi att de **generaliserade integralerna** är **konvergenta** med värdena A respektive B. Detta betecknas

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = A \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^b g(t)\,dt = B\,. \tag{5.20}$$

Om gränsvärdena inte existerar säger vi att de generaliserade integralerna är **divergenta.**

Exempel 5.10. Visa att enbart den första generaliserade integralen är konvergent i fallen

$$(a) \int_0^\infty e^{-x}\,dx \quad (b) \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx\,, \quad (c) \int_0^\infty \cos x\,dx\,.$$

Exempel 5.11. Visa att den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

är konvergent om och endast om $\alpha > 1$.

Definition 5.3. Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$ samt att de generaliserade integralerna $\int_c^\infty f(x)\,dx$ och $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ är konvergenta för alla $c \in \mathbb{R}$. Då är den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

konvergent med värdet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx\,. \tag{5.21}$$

Man kan visa att om den generaliserade integralen i ovanstående definition är konvergent, så är den oberoende av valet av $c \in \mathbb{R}$. Det räcker att kolla konvergensen med ett värde på c, exempelvis $c = 0$.

Observera att man **inte** kan undersöka

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx\,.$$

Om vi exempelvis har $f(x) = x$ så är integralerna $\int_c^\infty f(x)\,dx$ och $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ båda divergenta, så $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ är divergent, men

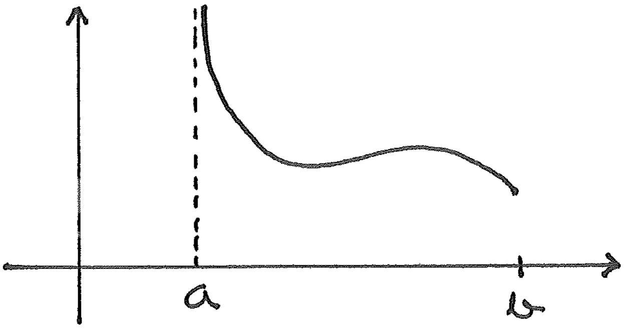
$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-c}^{c} = \frac{c^2}{2} - \frac{(-c)^2}{2} = 0\,. \;!!$$

Exempel 5.12. Visa att integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x\,e^{-x^2}\,dx$$

är konvergent.

Betrakta nu en funktion $f(x)$ som är kontinuerlig och begränsad i varje intervall $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, men obegränsad i intervallet $[a, b]$.



Definition 5.4. Den generaliserade integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

säges vara **konvergent** med värdet A om

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = A\,. \tag{5.22}$$

I annat fall är den generaliserade integralen **divergent**.

Analoga definitioner har vi om $f(x)$ blir obegränsad då vi närmar oss den högra intervalländpunkten b eller då $f(x)$ blir obegränsad då vi närmar oss a och b.

Vi kan kombinera båda generaliseringarna och ha integraler av typen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx\,,$$

där $f(x)$ blir obegränsad då vi närmar oss a.

Exempel 5.13. Undersök de generaliserade integralerna

$$(a)\ \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx\,, \qquad (b)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Exempel 5.14. Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

är konvergent om och endast om $\alpha < 1$.

Vi kan formulera en användbar jämförelsesats för generaliserade integraler med kontinuerlig och positiv integrand.

Sats 5.10. Om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga och om för varje x på integrationsintervallet gäller:

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

så har vi att:

1. Om integralen med $g(x)$ som integrand är konvergent så är även integralen med $f(x)$ som integrand konvergent.
2. Om integralen med $f(x)$ som integrand är divergent så är även integralen med $g(x)$ som integrand divergent.

Vi tillämpar jämförelsesatsen på ett exempel.

Exempel 5.15. Undersök om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

är konvergent.

5.5 Tillämpning av integraler på serier

Vi behandlade i avsnitt 2.5 den geometriska serien samt serier med teleskoperande partialsummor. Med hjälp av teorin för integraler kan vi undersöka konvergensen hos serier av formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

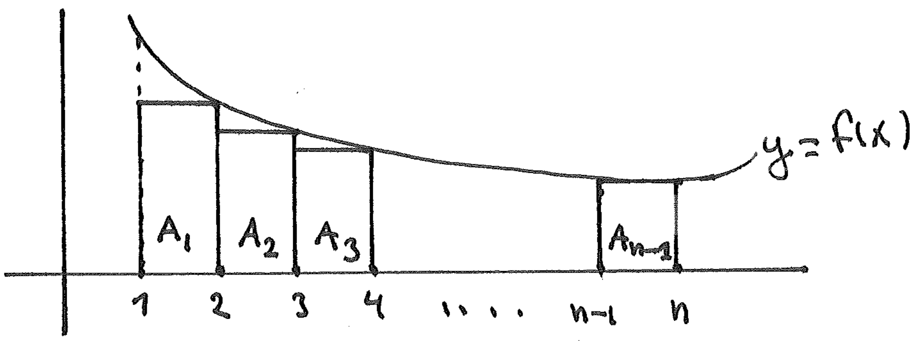
där funktionen $f(x)$ är **kontinuerlig, positiv** och **avtagande** för $x \geq 1$. Vi kan då utföra följande **integraluppskattningar av partialsummorna**:

Sats 5.11. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig, avtagande och positiv för $x \geq 1$. Då gäller

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx, \tag{5.23}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Bevis: Betrakta förjande figur:

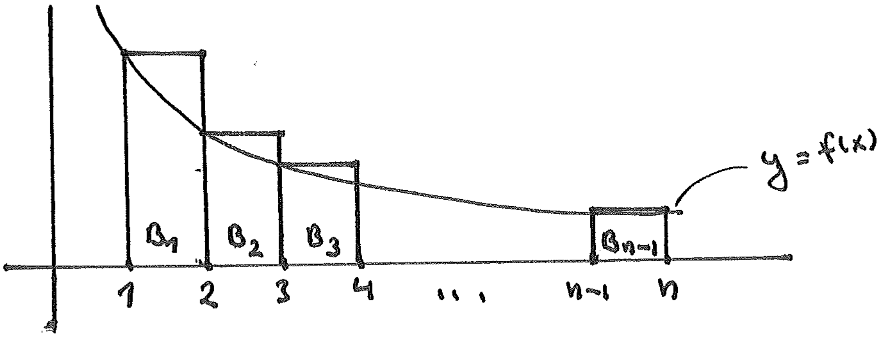


Då gäller det för areorna $A_1, \ldots, A_{n-1}$ att

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} \leq \int_1^n f(x)\,dx,$$

så genom att addera $f(1)$ till de yttre leden fås den andra olikheten i (5.23).

Betrakta nu figuren:



Nu gäller det för areorna $B_1, ..., B_{n-1}$ att

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\, dx\,.$$

Genom att addera $f(n)$ till de yttre leden fås första olikheten i (5.23). □

Exempel 5.16. Visa att

(a) Serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent, (b) Harmoniska serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent.

Antag nu åter att $f(x)$ är kontinuerlig, positiv och avtagande för $x \geq 1$. För serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

bildar partialsummorna

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

en växande talföljd $\{S_n\}$. Om denna är uppåt begränsad så existerar

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

och serien är konvergent med summan S.

Antag att den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

är konvergent. Då ger formel (5.23) att följden av partialsummor $\{S_n\}$ är uppåt begränsad av $f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$, så serien är konvergent.

Om vi antar att serien är konvergent så är, med stöd av (5.23), den växande funktionen (av variabeln x),

$$\int_1^x f(t)\,dt$$

uppåt begränsad av $\sum_{k=1}^\infty f(k)$, så gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^\infty f(t)\,dt$$

existerar. Därmed får vi **Cauchys integralkriterium** för att undersöka om en positiv serie är konvergent:

Sats 5.12. Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig, avtagande och positiv för $x \geq 1$. Då är serien

$$\sum_{k=1}^\infty f(k)$$

konvergent om och endast om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

är konvergent.

En direkt konsekvens av Cauchys integralkriterium och Exempel 5.11 är att serien

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$$

är konvergent om och endast om $\alpha > 1$.

Exempel 5.17. Undersök om följande serie är konvergent,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{k}).$$

Vi har också en jämförelsesats för positiva serier:

Sats 5.13. Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är två positiva serier för vilka det gäller att:

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

för alla heltal $k \geq 1$. Då gäller det att:

1. Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent så är även serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

2. Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent så är även serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

Bevis: Vi har för partialsummorna att

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = \tilde{S}_n.$$

1. Att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar medför att den växande talföjden $\{\tilde{S}_n\}$ är uppåt begränsad, vilket i sin tur med för att den växande talföljden $\{S_n\}$ är uppåt begränsad och därmed är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

2. Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent så är den växande talföljden $\{S_n\}$ obegränsad uppåt, vilket medför att även den växande talföjden $\{\tilde{S}_n\}$ är obegränsad uppåt och serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent. □

Exempel 5.18. Undersök om följande serier konvergerar,

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}, \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}.$$

5.6 Areor, volymer och båglängder

Om vi har en kontinuerlig funktion $f(x)$ som är positiv på ett ändligt slutet intervall $[a,b]$ har vi tolkat arean A mellan x-axeln och grafen $y = f(x)$ då $a \leq x \leq b$, dvs Arean av området bestående av punkterna

$$\{(x,y) : 0 \leq y \leq f(x)\,,\ a \leq x \leq b\}\,,$$

som given av

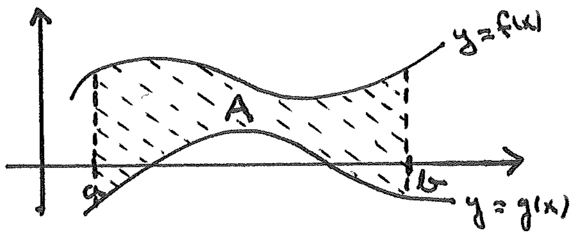
$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Vi kan utvidga denna tolkning till ytan mellan två kontinuerliga funktioner $f(x)$ och $g(x)$ på $[a,b]$ sådana att $g(x) \leq f(x)$ på $[a,b]$. Då ges arean A mellan $f(x)$ och $g(x)$ som arean av området givet av punktmängden

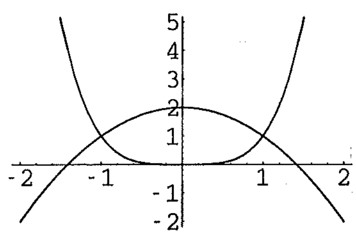
$$\{(x,y) : g(x) \leq y \leq f(x)\,,\ a \leq x \leq b\}\,,$$

och vi definierar denna area som

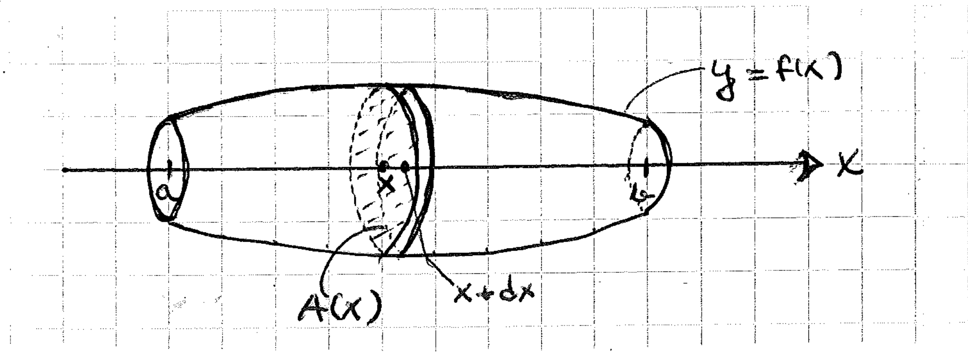
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,. \tag{5.24}$$



Exempel 5.19. Beräkna arean av det område som uppåt begränsas av $f(x) = 2 - x^2$ och nedåt av $g(x) = x^4$.



Antag nu att vi har en funktion $f(x)$ som är kontinuerlig och positiv på intervallet $[a, b]$. Om vi roterar ytan mellan x-axeln och $y = f(x)$ kring x-axeln erhåller vi en **rotationssymmetrisk kropp** vars volym V kan beräknas. Antag att vi gör ett tvärsnitt vinkelrätt mot x-axeln i denna kropp.



Då erhålls en cirkulär yta med arean $A(x) = \pi f(x)^2$. Om vi skär ut en skiva med bredden dx vinkelrätt i punkterna x och $x + dx$, så kan dess volym $V(x)$ approximeras med

$$V(x) = A(x) \cdot dx\,.$$

Delar vi nu in hela kroppen i skivor med bredden dx och låter skivbredden gå mot noll kan vi tolka volymen V som given av integralen

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\, f(x)^2\,dx\,. \tag{5.25}$$

Man kan visa att arean av den **rotationsyta** som uppkommer då kurvan $y = f(x)$ roterar kring x-axeln ges av

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,. \tag{5.26}$$

Exempel 5.20. Beräkna volymen och rotationsytan av den (oändligt utdragna) rotationskropp som bildas då kurvan

$$y = f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad 1 \le x < \infty\,,$$

roterar kring x-axeln

Antag att en kurva definieras explicit av

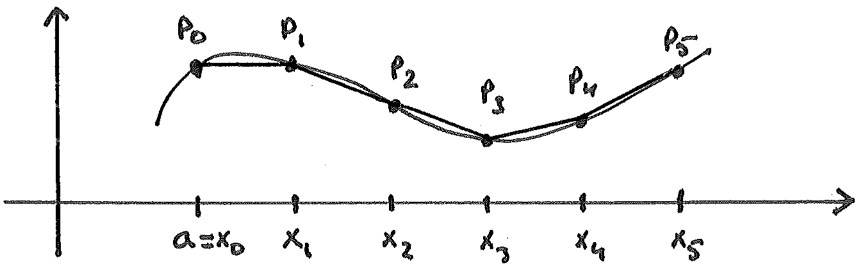
$$y = f(x)\,, \quad a \leq x \leq b\,,$$

och att $f(x)$ och dess derivata $f'(x)$ är kontinuerliga på intervallet $[a, b]$. Då definierar $y = f(x)$ en regulär kurva med en kontinuerligt varierande tangent. För att bestämma **båglängden** av kurvan på intervallet $[a, b]$ gör vi en indelning av detta i delintervall

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

och definierar en styckevis linjär approximation av kurvan med hjälp av punkterna

$$P_j = f(x_j)\,, \quad j = 0, \ldots, n\,.$$



Längden av linjestycket som förenar P_j med P_{j+1} är

$$\Delta l_j = \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2}\,, \tag{5.27}$$

där $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ och $\Delta y_j = f(x_{j+1}) - f(x_j)$. Nu ger medelvärdessatsen, Sats 3.6, att det finns en punkt $\xi_j \in]x_j, x_{j+1}[$ sådan att

$$f(x_{j+1}) - f(x_j) = f'(\xi_j)\,(x_{j+1} - x_j)\,.$$

Detta betyder att vi kan omskriva formel (5.27) till

$$\Delta l_j = \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2}\,\Delta x_j\,,$$

och därmed blir totala längden av den styckevis linjära kurvan

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta l_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2}\,\Delta x_j\,.$$

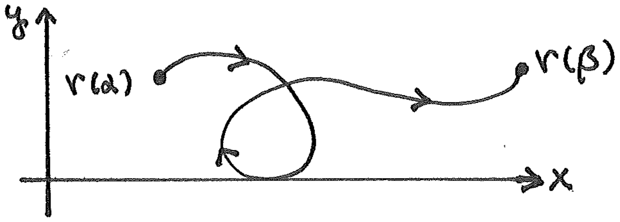
Låter vi nu indelning bli finare så att längden på det längsta delintervallet går mot noll kan vi tydligen definiera båglängden L för kurvan $y = f(x)$ på $[a, b]$ med integralen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,. \tag{5.28}$$

Exempel 5.21. Bestäm båglängden av parabeln $y = x^2$ då $0 \leq x \leq 1$.

Ekvationen för en plan kurva i parameterform ges av

$$r(t) = (x(t), y(t))\,, \quad \alpha \leq t \leq \beta\,.$$



Exempelvis ges ekvationen för en origocentrerad cirkel med radien a av parameterframställningen

$$\begin{cases} x(t) = a\,\cos t \\ y(t) = a\,\sin t\,, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Derivatan av $r(t)$ definieras som

$$r'(t) = (x'(t), y'(t))\,.$$

Antag att vi har en plan kurva med parameterframställning $r(t) = (x(t), y(t))$ på intervallet $[\alpha, \beta]$. Om $x'(t)$ och $y'(t)$ är kontinuerliga på parameterintervallet $[\alpha, \beta]$ så kan man visa att båglängden L av kurvan $r(t)$ ges av

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,. \tag{5.29}$$

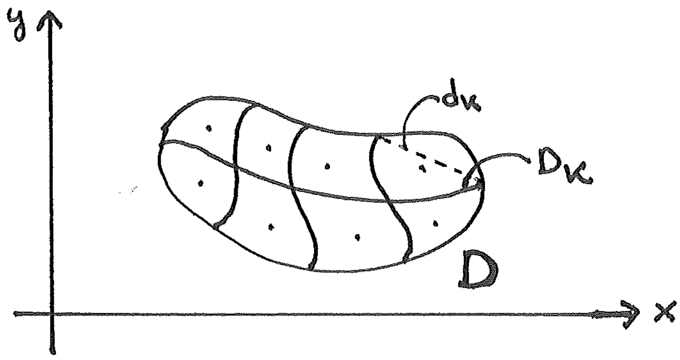
Då ges omkretsen av ovanstående cirkel med radien a av

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin(t))^2 + (a\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = \Big[at\Big]_0^{2\pi} = 2\pi\, a\,,$$

som sig bör.

5.7 Dubbelintegraler

Antag att vi har en funktion $f(x, y)$ som är en avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$, alltså en reellvärd funktion av två reella variabler x och y. Den har då sin definitionsmängd D_f i ett två-dimensionellt xy-plan. Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig på ett slutet begränsat område D, där $D \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^2$.



Vi gör en **partition** (indelning) av D i delområden D_k, $k = 1, \dots, n$. Sätt

$$
\begin{aligned}
m(D_k) &= \text{ arean av } D_k\,, \\
d_k &= \max_{x,y \in D_k} |x - y| = \max_{x,y \in D_k} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,, \\
& \quad \text{där } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)\,,\ (d_k \text{ kallas diametern av } D_k)\,.
\end{aligned}
$$

Tag $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, $k = 1, \dots, n$ och bilda Riemannsumman

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, m(D_k)\,.
$$

Antag att $\max_{1 \le k \le n} d_k \to 0$, då $n \to \infty$. Då kan man visa att $\lim_{n \to \infty} S_n$ existerar. Vi betecknar gränsvärdet

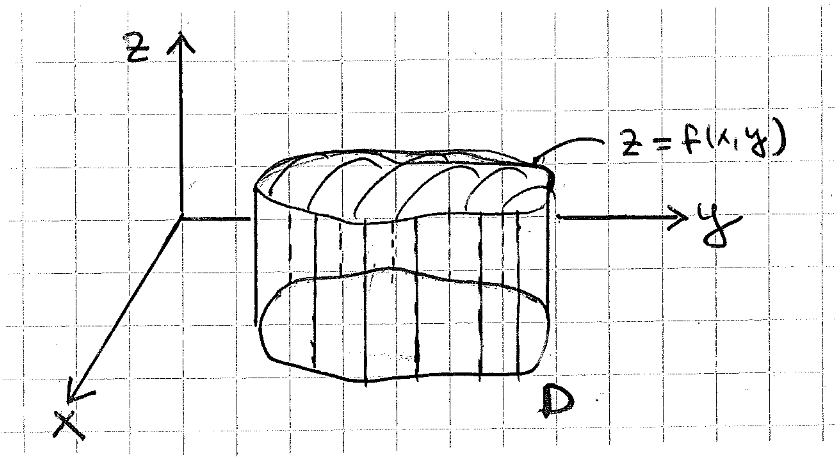
$$
\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{n \to \infty} S_n
$$

och utläser det som: "Dubbelintegralen av $f(x, y)$ över D".

Geometrisk tolkning: Om $f(x,y) \geq 0$ på D så tolkas

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

som volymen av den kropp som "upptill" begränsas av ytan $z = f(x,y)$, "nedtill" av xy-planet och i "sidled" av en z-axelriktad "cylinder" som skär xy-planet längs randen av området D.



Beräkning av dubbelintegraler

Definition 5.5. Ett område D är **enkelt i x-led** om det kan skrivas i formen

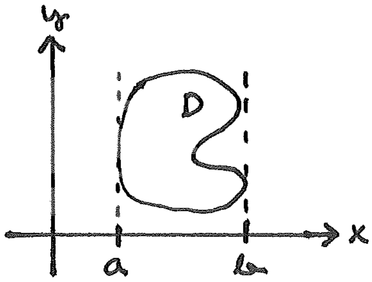
$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b\,,\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}\,,$$

där $\phi(x)$ och $\psi(x)$ är kontinuerliga funktioner av variabeln x.

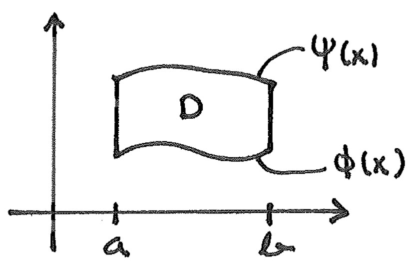
Ett område D är **enkelt i y-led** om det kan skrivas i formen

$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d\,,\ \eta(y) \leq x \leq \theta(y)\}\,,$$

där $\eta(y)$ och $\theta(y)$ är kontinuerliga funktioner av variabeln y.

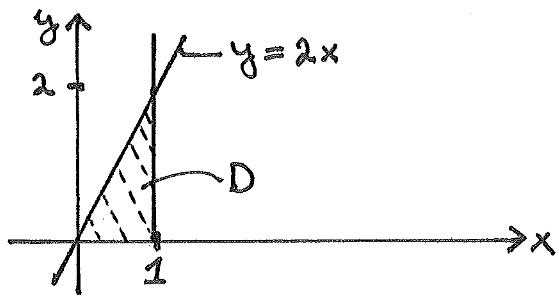


Ej enkelt i x-led



Enkelt i x-led

Exempel 5.22. Betrakta området $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1\,,\; 0 \leq y \leq 2x\}$.



Området är enkelt i x-led, ty vi har $a = 0,\ b = 1,\ \phi(x) = 0$ och $\psi(x) = 2x$.
Om vi omskriver D i formen

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2\,,\; \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}\,,$$

ser vi att området också är enkelt i y-led, ty vi har $c = 0,\ d = 2,\ \eta(y) = y/2$ och $\theta(y) = 1$.

Om D är **enkelt i x-led** kan vi beräkna dubbelintegralen som

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \Big)\, dx\,. \tag{5.30}$$

Tolkning: Vi integrerar först med avseende på variabeln y, varvid x betraktas som konstant. Resultatet är en funktion av variabeln x, som sedan integreras med avseende på x från a till b.

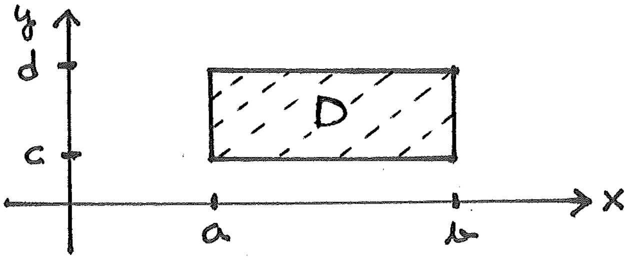
Om D är **enkelt i y-led** kan vi beräkna dubbelintegralen som

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \Big(\int_{\eta(y)}^{\theta(y)} f(x, y)\, dx \Big)\, dy\,. \tag{5.31}$$

Tolkning: Vi integrerar först med avseende på variabeln x, varvid y betraktas som konstant. Resultatet är en funktion av variabeln y, som sedan integreras med avseende på y från c till d.

Exempel 5.23. Om D är en axelriktad rektangel,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b\,,\ c \leq y \leq d\}\,,$$



så är D enkelt i både x-led och y-led, så det gäller att

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\, dy \Big)\, dx \; = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\, dx \Big)\, dy\,.$$

Exempel 5.24. Beräkna över området $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$ integralen

$$I = \iint_D (x^2 y - y^2 x)\, dxdy\,.$$

Lösning: Området är enkelt i x-led så vi erhåller

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \Big(\int_0^1 (x^2 y - y^2 x)\, dy \Big)\, dx = \int_1^2 \Big[x^2 \frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3} \Big]_0^1 dx \\ &= \int_1^2 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \Big)\, dx = \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6} \Big]_1^2 = \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

Exempel 5.25. Visa att

$$I = \iint_D (x^2 + xy)\, dxdy = \frac{5}{8}\,,$$

då området D ges av triangeln med hörnen $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(1, 2)$.

Variabelbyte i dubbelintegraler

Definition 5.6. Låt a, b, c, d vara reella tal. **Determinanten** $|\cdot|$ definieras genom

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c\,.$$

Betrakta dubbelintegralen

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

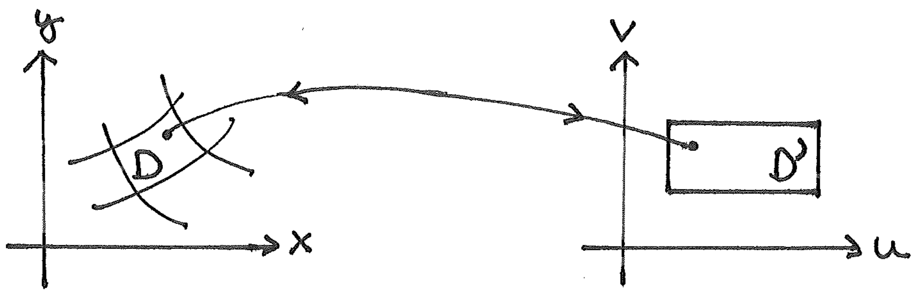
Vi antar vidare att:

1. $f(x,y)$ är kontinuerlig på det **begränsade** området D.

2. Vi kan införa nya variabler u, v genom transformationerna

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \qquad \left(\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \right),$$

som ger en **bijektiv** avbildning mellan området D i xy-planet och området D' i uv-planet.



3. Antag att $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ och $\frac{\partial y}{\partial v}$ är kontinuerliga i D', och att **funktionaldeterminanten** $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ på D', där funktionaldeterminanten definieras genom

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\,.$$

Om punkterna 1, 2 och 3 är uppfyllda kan vi göra variabelbytet:

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv\,. \qquad (5.32)$$

Observera att vi tar beloppet av funktionaldeterminanten i ovanstående formel!

Ett ofta användbart samband för funktionaldeterminanter är

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}\,.$$

Exempel 5.26. Beräkna funktionaldeterminanterna för transformationerna

$$\begin{cases} x = 2u - v \ (= x(u,v)) \\ y = 3u + v \ (= y(u,v)) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = \frac{1}{5}(x+y) \ (= u(x,y)) \\ v = -\frac{1}{5}(3x-2y) \ (= v(x,y))\,. \end{cases}$$

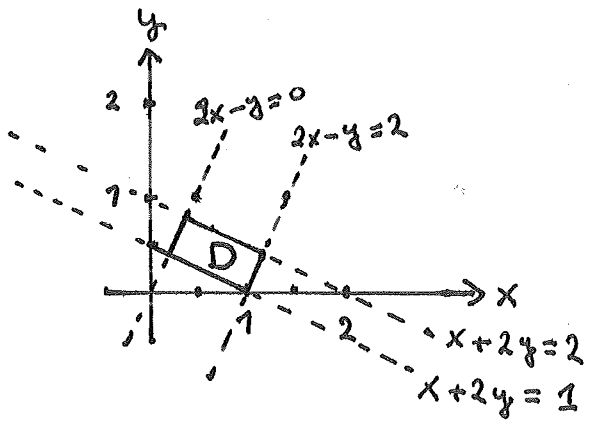
<u>Linjära transformationer</u>

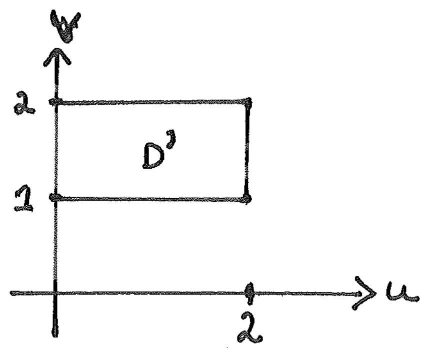
Exempel 5.27. Beräkna

$$I = \iint_D \frac{x}{x+2y}\,dxdy$$

över den parallellogram D som begränsas av linjerna $2x - y = 0$, $2x - y = 2$, $x + 2y = 1$ och $x + 2y = 2$.
Lösning: Vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 2y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5}(2u+v) \ (= x(u,v)) \\ y = \frac{1}{5}(-u+2v) \ (= y(u,v))\,. \end{cases}$$





Funktionaldeterminanten blir då

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \quad \text{(kolla!)}.$$

Därmed erhåller vi

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \frac{\frac{1}{5}(2u+v)}{v} \left|\frac{1}{5}\right| dudv = \frac{1}{25}\int_1^2 \left(\int_0^2 \left(\frac{2u}{v}+1\right) du \right) dv \\ &= \frac{1}{25}\int_1^2 \left[\frac{u^2}{v}+u\right]_0^2 dv = \frac{1}{25}\int_1^2 \left(\frac{4}{v}+2\right) dv = \frac{1}{25}\Big[4\ln|v|+2v\Big]_1^2 \\ &= \frac{4\ln 2+2}{25}. \end{aligned}$$

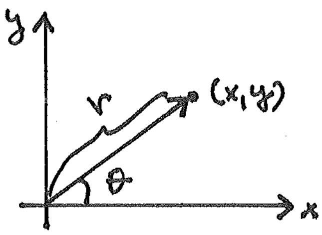
Exempel 5.28. Beräkna integralen

$$I = \iint_D \sqrt{x^2-y^2}\, dxdy,$$

där D är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$.

<u>Polära koordinater</u>

Om vi tolkar punkten (x,y) som en vektor med längden r och vinkel θ till positiva x-axeln kan vi övergå till polära koordinater r och θ.



Vi får då transformationen

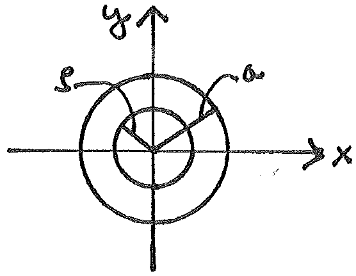
$$\begin{cases} x = r\cos\theta = x(r,\theta) \\ y = r\sin\theta = y(r,\theta). \end{cases}$$

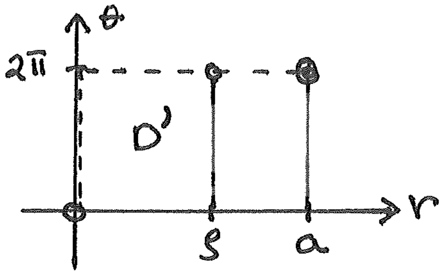
Då blir funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{vmatrix} = r\,\cos^2\theta - (-r\,\sin^2\theta) = r\,.$$

Vi får en bijektiv avbildning mellan områdena

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2\} \quad \text{och} \quad D' = \{(r,\theta) : 0 < r \le a\,,\ 0 \le \theta < 2\pi\}\,.$$





"Origocentrerade cirklar i xy-planet avbildas på θ-axelparallella sträckor i rθ-planet"

Exempel 5.29. Beräkna för cirkelskivan $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy\,.$$

Om D är en cirkelskiva med radien R och medelpunkten (x_0, y_0) gör man transformationen

$$\begin{cases} x = x_0 + r\,\cos\theta \ = x(r,\theta) \\ y = y_0 + r\,\sin\theta \ = y(r,\theta)\,, \quad 0 < r \le R\,,\ 0 \le \theta < 2\pi\,, \end{cases}$$

med funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r\,.$$

Exempel 5.30. Beräkna integralen

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy\,,$$

där D är cirkelskivan $\{(x,y) : x^2 + y^2 + 2x \le 0\}$.

Vi betraktar ett exempel där man måste göra en annan typ av transformation:

Exempel 5.31. Bestäm

$$I = \iint_D \frac{y\, e^{\frac{y}{x}}}{x(1+xy)^2}\, dxdy\,,$$

där D är området mellan hyperbelbågarna $xy = 1$ och $xy = 2$, samt de räta linjerna $y = x$ och $y = 2x$, där $x > 0,\ y > 0$.

Avslutningsvis skall vi kort presentera några tillämpningar av dubbelintegraler:
Arean $A(D)$ för ett område D kan beräknas med formeln

$$A(D) = \iint_D 1 \cdot dxdy\,, \tag{5.33}$$

och om **densiteten** för en skiva av formen D ges av $\rho(x,y) \geq 0$ i punkterna $(x,y) \in D$, så ges skivans **massa** $M(D)$ av formeln

$$M(D) = \iint_D \rho(x,y)\, dxdy\,. \tag{5.34}$$

Exempel 5.32. Beräkna massan hos cirkelskivan D med radie 1, medelpunkt $(0,0)$ och densitet $\rho(x,y) = |x|$.

Tyngdpunkten $T = (a,b)$ till ytstycket D med densitet $\rho(x,y)$ definieras genom

$$\begin{cases} a = \frac{1}{M(D)} \iint_D x\, \rho(x,y)\, dxdy \\ b = \frac{1}{M(D)} \iint_D y\, \rho(x,y)\, dxdy\,. \end{cases} \tag{5.35}$$

Exempel 5.33. Beräkna tyngdpunkten till halvcirkeln D definerad genom $x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1$, då densiteten är $\rho(x,y) = 1$ i varje punkt.

Antag att de partiella derivatorna $f'_x(x,y)$ och $f'_y(x,y)$ är kontinuerliga på området D. Då kan **arean** $A(f)$ av den krökta ytan $z = f(x,y)$ över området D beräknas med formeln

$$A(f) = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}\, dxdy\,. \tag{5.36}$$

Exempel 5.34. Beräkna arean av ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,,\ x^2 + y^2 \leq 1/2\,.$ Denna yta är en del av en klotyta med radien 1.