4 Primitiva funktioner

4.1 Grundläggande egenskaper och exempel

Definition 4.1. Låt $f(x)$ vara definierad på ett intervall I. En deriverbar funktion $F(x)$ kallas en **primitiv funktion** (eller en **primitiv**) till $f(x)$ om det gäller att

$$F'(x) = f(x)$$

för alla $x \in I$.

Om en funktion $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x)$ så har vi en hel skara av funktioner

$$F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

som alla är primitiva funktioner till $f(x)$, ty

$$D[F(x) + C] = D[F(x)] + D[C] = F'(x) + 0 = f(x)\,.$$

Men denna skara av funktioner utgör också mängden av alla primitiva funktioner till $f(x)$, ty vi har satsen:

Sats 4.1. Antag att $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ på ett intervall I. Då finns det en konstant $C \in \mathbb{R}$ sådan att

$$F(x) = G(x) + C$$

för alla $x \in I$.

Bevis: Definiera för alla $x \in I$ funktionen

$$H(x) = F(x) - G(x)\,.$$

Då gäller det för alla $x \in I$ att

$$H'(x) = D[F(x) - G(x)] = D[F(x)] - D[G(x)] = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Därmed är $H'(x) \equiv 0$ på intervallet I, vilket betyder att $H(x) \equiv C$ på I för någon konstant $C \in \mathbb{R}$ och vi har att $F(x) = G(x) + C$ på intervallet I. □

Exempel 4.1. Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$$

har den primitiva funktionen

$$F(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| .$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

En primitiv funktion till en funktion $f(x)$ betecknas med hjälp av (det obestämda) integraltecknet $\int$,

$$\int f(x)\,dx\,, \tag{4.1}$$

vilket utläses "integralen av $f(x)\,dx$ eller den obestämda integralen av $f(x)\,dx$". Man bör beakta att denna beteckning inkorporerar en obestämd konstant C. För funktionerna i Exempel 4.1 har vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}}\,dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C\,.$$

Räknereglerna för derivator ger enkelt följande formler,

$$\int \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx\,, \quad \alpha \text{ konstant}\,, \tag{4.2}$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,. \tag{4.3}$$

Då vi i föregående kapitel härledde en hel räcka med deriveringsformler för de elementära funktionerna kan vi direkt ställa upp en användbar tabell över primitiva funktioner, i vilken α och C betecknar reella konstanter:

$$\int \alpha\,dx = \alpha x + C\,, \tag{4.4}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad \alpha \neq -1\,, \tag{4.5}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,, \tag{4.6}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C\,, \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,, \tag{4.7}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\,, \tag{4.8}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,, \tag{4.9}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C\,, \tag{4.10}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C\,, \tag{4.11}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C\,, \tag{4.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C\,, \tag{4.13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C\,. \tag{4.14}$$

Med de ovan givna reglerna är det enkelt att bestämma primitiva funktioner till polynom, vissa rationella funktioner och endel enkla uttryck bildade av elementära funktioner.

Exempel 4.2. Bestäm primitiva funktioner till

$$(a)\ 3x^3 - 5x^2 + 30\,, \qquad (b)\ \frac{x^2\sin x + 5x}{x^2}\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

I Exempel 3.14 visade vi att om $f(x) \neq 0$ så gäller $D\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Då erhålls formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,. \tag{4.15}$$

Exempel 4.3. Beräkna primitiva funktioner till

$$(a)\ \tan x\,, \quad (b)\ \cot x\,, \quad (c)\ \frac{2x^3}{2+x^4}\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Antag att $F(x)$ och $g(x)$ är deriverbara och att $F'(x) = f(x)$. Betrakta den sammansatta funktionen

$$F(g(x)) + C\,, \quad C \text{ konstant.}$$

Då gäller

$$D[F(g(x)) + C] = F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)\,.$$

Med andra ord erhålls formeln

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,, \quad \text{där } F'(x) = f(x)\,. \tag{4.16}$$

Exempel 4.4. Som en tillämpning av formel (4.16) fås att

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2) + C\,,$$

där vi har $F(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ och $g(x) = x^2$.

Speciellt om vi i (4.16) väljer x^α som yttre funktion och $f(x)$ som inre funktion får vi formeln

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad \alpha \neq -1\,. \tag{4.17}$$

Exempel 4.5. Beräkna med hjälp av formel (4.17) och $\alpha = 1$

$$(a)\ \int f(x) \cdot f'(x)\,dx\,, \qquad (b)\ \int \cos x \cdot \sin x\,dx\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

4.2 Partiell integration

Om det verkar besvärligt att bestämma en primitiv funktion till en produkt $f(x)g(x)$, medan uttrycket $F(x)g'(x)$ verkar enklare, kan man prova på metoden att **partialintegrera** funktionen $f(x)$.

Sats 4.2. **(Partiell integration.)** Antag att $F'(x) = f(x)$ och att $g(x)$ är en deriverbar funktion. Då gäller

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx\,. \tag{4.18}$$

Bevis: Formelns giltighet verifieras genom direkt derivering av högra ledet,

$$\begin{aligned} D[F(x)g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx] &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) \\ &= F'(x)g(x) \\ &= f(x)g(x)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Exempel 4.6. Beräkna

$$(a) \int x \sin x\, dx\,, \qquad (b) \int \ln x\, dx\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Ibland krävs det att vi utför partiell integration två (eller flera) gånger.

Exempel 4.7. Beräkna

$$(a) \int x^2 \cos x\, dx\,, \qquad (b) \int e^x \sin x\, dx\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

4.3 Variabelsubstitution

Antag att $F'(x) = f(x)$ och att $g(x)$ är deriverbar. Med stöd av formel (4.16) gäller

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = F(g(t)) + C = \left[\int f(x)\, dx\right]_{x=g(t)}, \qquad (*)$$

där sista ledet betecknar substitution av x med $g(t)$. Antag att $g(t)$ är strängt monoton. Då har $g(x)$ en invers,

$$x = g(t) \Leftrightarrow t = g^{-1}(x),$$

och om vi i de yttre leden i $(*)$ sätter $t = g^{-1}(x)$ får vi

$$\left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt\right]_{t=g^{-1}(x)} = \left[\int f(x)\, dx\right]_{x=g(g^{-1}(x))(=x)}.$$

Vi får **formeln för variabelsubstitution**,

$$\int f(x)\, dx = \left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt\right]_{t=g^{-1}(x)}. \qquad (4.19)$$

Den praktiska tolkningen är följande:

1. För att beräkna $\int f(x)\, dx$ gör vi substitutionen $x = g(t)$, varvid $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, så vi byter dx mot $g'(t)\, dt$.
2. Sedan beräknar vi $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$.
3. I resultatet substituerar vi slutligen $t = g^{-1}(x)$ för att få en primitiv i variabeln x.

Ibland är det enklare att göra en substitution av formen $h(x) = t$ och byta $h'(x)\, dx$ mot dt. Vi illustrerar båda metoderna i följande exempel.

Exempel 4.8. Bestäm primitiva funktionerna till funktionen $\frac{e^{2x}}{e^x+1}$.
Lösning: 1) Vi gör substitutionen $x = \ln t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx &= \left[x = \ln t = g(t),\ dx = g'(t)\, dt = \frac{1}{t}\, dt,\ t = g^{-1}(x) = e^x\right] \\
&= \int \frac{e^{\ln t^2}}{e^{\ln t}+1} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t^2}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t}{t+1}\, dt \\
&= \int \frac{t+1-1}{t+1}\, dt = \int 1 \cdot dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt \\
&= t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln|e^x+1| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C.
\end{aligned}$$

2) Kortare beräkningar fås med (den kanske naturligare) substitutionen $e^x + 1 = t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{e^x}{e^x+1}\cdot e^x\,dx \\
&= [h(x) = e^x + 1 = t,\ h'(x)\,dx = e^x\,dx = dt] \\
&= \int \frac{t-1}{t}\,dt = \int (1-\frac{1}{t})\,dt \\
&= t - \ln|t| + C_1 = e^x - \ln(e^x+1) + C\,.
\end{aligned}$$

Exempel 4.9. Beräkna

$$\int \arctan(\sqrt{x-1})\,dx\,, \qquad x > 1\,,$$

med hjälp av substitutionen $\sqrt{x-1} = t$. (Se föreläsningsanteckningar).

Kvadratkomplettering är en användbar teknik för integrering av vissa rationella funktioner.

Exempel 4.10. Beräkna

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

Lösning: Vi utför kvadratkomplettering i nämnaren för att kunna utföra en lämplig substitution,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = [x + 1/2 = \sqrt{3/4}\,t\,,\ dx = \sqrt{3/4}\,dt] \\
&= \int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\,dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + C\,.
\end{aligned}$$

4.4 Integration av rationella funktioner

För att bestämma primitiva funktionen

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx\,,$$

där p, q är polynom av gradtal m respektive n har vi ett systematiskt tillvägagångssätt:

1. Om $m \geq n$ utför vi **division** och erhåller

   $$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\,,$$

   där $h(x)$ är ett polynom av gradtal $m - n$ och gradtalet av $r(x)$ är strängt mindre än gradtalet av $q(x)$. Då gäller

   $$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int h(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx\,,$$

   där den första integralen i högra ledet är enkel att beräkna.

2. För att **beräkna integralen**

   $$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx\,, \quad \operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} q(x)\,,$$

   faktoriserar vi $q(x)$ i reella första- och andragradsfaktorer, vilket i teorin är möjligt om $q(x)$ har reella koefficienter, (även i praktiken i alla fall då gradtalet för $q(x)$ inte överstiger fyra).

   Mot **reell rot** $x = a$ till ekvationen $q(x) = 0$ svarar faktorn

   $$(x - a)\,.$$

   Komplexa rötter till $q(x) = 0$ uppträder som konjugerade par. Om $x = \alpha + i\beta$ är en rot till ekvationen, så är även $x = \alpha - i\beta$ en rot. Vi får då andragradsfaktorn

   $$(x - (\alpha + i\beta))\,(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta = x^2 + ax + b\,.$$

3. **Partialbråksuppdelning** av $\frac{r(x)}{q(x)}$ innebär uppdelning i en summa av delbråk.

   a) Mot varje **enkel** förstagradsfaktor $(x-a)$ i $q(x)$ svarar en term av formen
$$\frac{A}{x-a}, \quad A \text{ konstant}.$$

   b) Mot varje **multipel** förstagradsfaktor $(x-a)^n$, $n \geq 2$, i $q(x)$ svarar termerna
$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}, \quad A_1, \ldots, A_n \text{ konstanter}.$$

   c) Mot en **enkel** andragradsfaktor (x^2+ax+b) i $q(x)$ svarar termen
$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}, \quad A, B \text{ konstanter}.$$

   (d) Mot en **multipel** andragradsfaktor $(x^2+ax+b)^n$, $n \geq 2$, i $q(x)$ svarar termerna
$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}, \quad A_i, B_i \text{ konstanter}.)$$

4. **Bestäm konstanterna** i partialbråksuppdelningen av $\frac{r(x)}{q(x)}$.

5. **Integrera** partialbråksuppdelningen av $\frac{r(x)}{q(x)}$.

<u>Integration av termerna i partialbråksuppdelningen</u>

I fallet 3 a) erhålls
$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$
och i fallet 3 b) har vi för $n \geq 2$,
$$\int \frac{A_n}{(x-a)^n}\,dx = A_n \int (x-a)^{-n}\,dx = A_n \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C.$$

Fallet 3 c) är mera komplicerat.

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx \\ &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx\,.\end{aligned}$$

Vi undersöker den andra integralen genom att först kvadratkomplettera nämnaren,

$$x^2+px+q = x^2+px+(p/2)^2-(p/2)^2+q = (x+p/2)^2+a\,, \quad a = q-(p/2)^2\,.$$

Då ju ekvationen $x^2+px+q=0$ inte har reella rötter gäller det att

$$p^2-4q<0 \Leftrightarrow q-p^2/4>0 \Leftrightarrow a>0\,.$$

Nu gör vi substitutionen $x+p/2=\sqrt{a}\,t,\ dx=\sqrt{a}\,dt$ och erhåller

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx &= \int \frac{1}{(x+p/2)^2+a}\,dx = \int \frac{\sqrt{a}\,dt}{at^2+a} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan t + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\Big(\frac{x+p/2}{\sqrt{a}}\Big)+C\,.\end{aligned}$$

Alltså får vi

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{a}}\arctan\Big(\frac{x+p/2}{\sqrt{a}}\Big)+C\,,$$

där $a=q-(p/2)^2$. Istället för att memorera denna formel bör man kunna utföra integreringen för varje givet fall enligt ovanstående mönster.

Bestämning av konstanterna i partialbråksuppdelningen

Vi demonstrerar förfarandet medelst två exempel.

Exempel 4.11. Partialbråksuppdela funktionen

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,.$$

Lösning: Vi gör ansatsen

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{(A+B+C)\,x^2 + (A+2B-3C)\,x - 6A - 3B + 2C}{(x-1)(x-2)(x+3)}.$$

Ur detta samband erhålls, då vi identifierar koefficienterna för täljarpolynomen, ekvationssystemet

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-3C=1 \\ -6A-3B+2C=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=-1/2 \\ B=3/5 \\ C=-1/10\,. \end{cases}$$

Alternativ lösningsmetod: Multiplicera båda leden i ansatsen med $(x-1)$:

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x+3}.$$

Sätt sedan $x=1$:

$$\frac{1+1}{(1-2)(1+3)} = A \quad \Leftrightarrow \quad A = -1/2\,.$$

Multiplikation av ansatsen med $(x-2)$ och insättning av $x=2$ respektive multiplikation med $(x+3)$ och insättning av $x=-3$ ger:

$$B = \frac{2+1}{(2-1)(2+3)} = 3/5 \quad \text{och} \quad C = \frac{-3+1}{(-3-1)(-3-2)} = -1/10\,.$$

Således erhåller vi då att

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{10}\ln|x+3| + K\,.$$

Exempel 4.12. Beräkna

$$\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x}\,dx\,.$$

Lösning: Nämnaren kan faktoriseras i formen $x(x^2+x+1)$ där (x^2+x+1) är en enkel andragradsfaktor, ty

$$x^2+x+1=(x-(-1/2+i\sqrt{3}/2))(x-(-1/2-i\sqrt{3}/2))\,.$$

Då gör vi ansatsen

$$\frac{x+3}{x(x^2+x+1)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

Multiplicera nu båda leden i ansatsen med x och sätt sedan $x=0$. Då kan vi bestämma konstanten A,

$$A=\frac{0+3}{0^2+0+1}=3\,.$$

Med konstanten A bestämd gör vi ansatsens högerled liknämnigt

$$\frac{x+3}{x(x^2+x+1)}\equiv\frac{(B+3)x^2+(C+3)x+3}{x(x^2+x+1)}\,.$$

Då ser vi genast att

$$B=-3 \quad \text{och} \quad C=-2$$

måste gälla. Partialbråksuppdelningen är utförd och vi kan integrera

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x}\,dx &= \int \frac{3}{x}\,dx-\int\frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx\\
&=3\ln|x|-\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\
&=3\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx
\end{aligned}$$

Men den sista integralen har vi beräknat i Exempel 4.10, så vi får att

$$\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x}\,dx=3\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)+K\,.$$

4.5 Integration av trigonometriska uttryck

Vi har tidigare, i några exempel, visat att man för vissa trigonometriska integrander kan använda omskrivning med hjälp av trigonometriska formler eller med hjälp av Eulers formler. I detta avsnitt skall vi presentera lämpliga tekniker för variabelsubstitution i trigonometriska uttryck.

Rationella uttryck i $\sin x$ och $\cos x$, exempelvis

$$\int \frac{\sin x \cos x - 3\sin^2 x}{2\cos x \sin x + \cos x}\, dx\,,$$

kan alltid överföras på beräkning av primitiver till rationella funktioner med hjälp av substitutionen

$$\begin{cases} \tan \dfrac{x}{2} = t\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \\ x = 2\arctan t\,, \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt\,, \end{cases}$$

varvid vi erhåller, med stöd av formlerna $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ och $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, att

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 1} = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Exempel 4.13. Beräkna

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sin x}\,, \qquad (b)\ \int \frac{dx}{\cos x}\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Några specialfall

För integraler av formen

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x\,dx\,, \qquad \int f(\cos x)\cdot\sin x\,dx$$

kan man prova substitutionerna

$$\begin{cases}\sin x = t\\ dt = \cos x\,dx\end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases}\cos x = t\\ dt = -\sin x\,dx\end{cases}$$

Exempel 4.14. Beräkna

$$(a)\ \int \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x)^2}\,, \qquad (b)\ \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

För integraler av formen

$$\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx\,, \qquad \int f(\tan x)\,dx\,, \qquad \int f(\tan x)\,\frac{dx}{\cos^2 x}$$

kan man prova substitutionen

$$\begin{cases}\tan x = t\,,\ x = \arctan t\\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\,,\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}\,.\end{cases}$$

Exempel 4.15. Beräkna

$$(a)\ \int \tan^3 x\,dx\,, \qquad (b)\ \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

4.6 Integraler innehållande rotuttryck

Vi behandlar olika typer av rotuttryck som kan förekomma vid bestämning av primitiva funktioner och anger substitutioner som kan användas för att förenkla problemet.

<u>Formen $\sqrt{a^2 - x^2}$</u>

Här kan man prova med substitutionen

$$x = a\sin t\,,\ |t| \le \pi/2\,, \quad t = \arcsin(\frac{x}{a})\,, \quad dx = a\cos t\,dt\,.$$

(Alternativt kan man prova med substitutionen $x = a\cos t$).

Exempel 4.16. Beräkna

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

<u>Formen $\sqrt{a^2 + x^2}$</u>

Prova med substitutionen $\sqrt{a^2 + x^2} = x - t$. Då får vi (kolla!):

$$x = \frac{t^2 - a^2}{2t}\,, \quad x - t = -\frac{t^2 + a^2}{2t}\,, \quad dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2}\,dt\,.$$

Exempel 4.17. Bestäm

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Formerna $\sqrt{ax+b}$ och $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

I dessa fall kan man prova med substitutionerna

$$\sqrt{ax+b} = t \quad \text{respektive} \quad \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t\,.$$

Exempel 4.18. Beräkna

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Formen $\sqrt{ax^2+bx+c}$, där $a>0$

Här kan vi göra substitutionen

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x - t\,.$$

Exempel 4.19. Beräkna

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Formen $\sqrt{ax^2+bx+c}$, där $a<0$ och polynomet har reella nollställen

I detta fall gör vi först omskrivningen

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{r^2-(x\pm\alpha)^2}\,.$$

Därefter gör vi substitutionen

$$(x\pm\alpha) = r\cdot\sin t\,, \quad |t| < \frac{\pi}{2}\,.$$

Exempel 4.20. Bestäm
$$\int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}\,.$$
(Se föreläsningsanteckningar).

<u>Formerna $\sqrt{1+x^2}$, $(1+x^2)$ eller $(1+x^2)^n$</u>

I dessa fall kan man försöka med substitutionen
$$\begin{cases} x = \tan t\,, \ |t| < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} = (1+\tan^2 t)\,dt\,. \end{cases}$$

Exempel 4.21. Beräkna
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,.$$
(Se föreläsningsanteckningar).

Givetvis kan ibland andra substitutioner än de rekommenderade fungera bra. Det avslutande exemplet löser vi behändigt med substitutionen $1/x = t$.

Exempel 4.22. Bestäm
$$\int \frac{\sqrt{x^2-x}}{x^3}\,, \quad x > 1\,.$$
(Se föreläsningsanteckningar).