3 Derivator

3.1 Definitioner och räkneregler

Vi betraktar avbildningar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är definierade i en omgivning av punkten $x_0 \in D_f$.

Kan vi hitta ett mått på tillväxthastigheten för $f(x)$ i punkten x_0?

Definition 3.1. Antag att $f(x)$ är definierad i en omgivning av punkten x_0. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar så säges $f(x)$ vara **deriverbar** i punkten x_0. Gränsvärdet kallas **derivatan** av $f(x)$ i punkten x_0 och betecknas

$$f'(x_0)\,, \quad \frac{df}{dx}(x_0) \text{ eller } Df(x_0)\,.$$

Om $f(x)$ är deriverbar i varje punkt i D_f så säger vi att $f(x)$ är **deriverbar**, och funktionen $x \mapsto f'(x)\,,\ x \in D_f$, kallas **derivatan** av $f(x)$, med beteckningarna

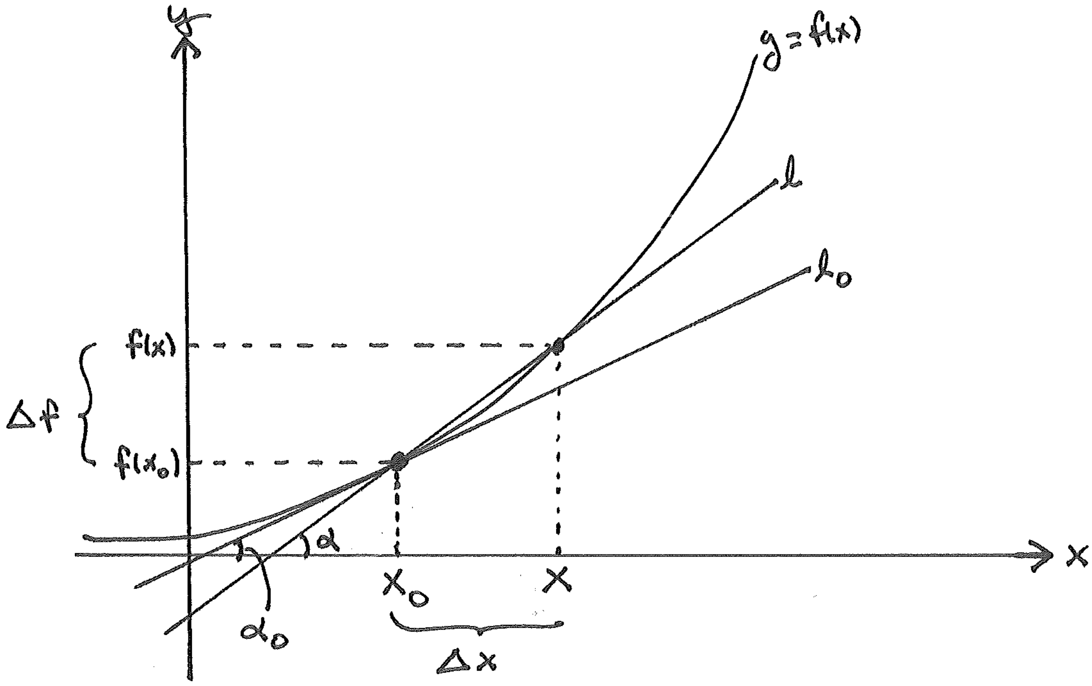
$$f'(x)\,, \quad \frac{df}{dx}(x) \text{ eller } Df(x)\,.$$

Observera att vi har ett alternativt skrivsätt av $f'(x_0)$ som ett gränsvärde, nämligen om vi sätter $x - x_0 = h$, så gäller $h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$, och vi får att definitionen på gränsvärde i punkten x_0 kan skrivas i formen

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Vi kommer att använda båda skrivsätten.

Med hjälp av det senare skrivsättet gör vi en **geometrisk tolkning** av begreppet derivata:



Vi har här beteckningarna $\Delta x = x - x_0$ och $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ och definerar begreppet **differenskvot** genom

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

och tolkar denna som den "genomsnittliga tillväxten av f i intervallet $[x_0, x]$".
Vi ser vidare att riktningskoefficienten för sekanten l genom punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x, f(x))$ ges av

$$\tan \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Tillväxthastigheten i punkten x_0 definieras som

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \tan \alpha_0 .$$

Definition 3.2. l_0 är kurvtangenten till $f(x)$ i punkten x_0. Tangentens riktningskoefficient och ekvation ges av

$$\tan \alpha_0 = f'(x_0) \quad \text{och} \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Normalen till $f(x)$ i punkten x_0 står vinkelrätt mot tangenten i punkten x_0. Normalen har riktningskoefficient $-1/f'(x_0)$ och ges av ekvationen

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,, \quad \text{om } f'(x_0) \neq 0\,.$$

Exempel 3.1. Antag att funktionen $f(t)$, $t \geq 0$, anger läget av en partikel vid tiden t. Om f är deriverbar för $t > 0$ anger $f'(t_0)$, $t_0 > 0$, partikelns hastighet vid tiden t_0. Om även funktionen $f'(t)$ är deriverbar så har f andraderivatan $Df'(t) = f''(t)$. Denna kan tolkas att ange hastighetsändringen vid tiden t_0, dvs. accelerationen.

Exempel 3.2. Funktionerna $f(x) = K$ ($=$ konstant) och $g(x) = x$ är deriverbara för alla $x \in \mathbb{R}$ med derivatorna

$$f'(x) = 0 \quad \text{och} \quad g'(x) = 1\,. \tag{3.1}$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Exempel 3.3. Betrakta potensfunktionen $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller

$$f'(x) = n\,x^{n-1}\,, \tag{3.2}$$

ty vi har för fixt $x_0 \in \mathbb{R}$ och med stöd av binomialsatsen att

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x_0 + (x - x_0))^n - x_0^n}{x - x_0} \\
&= \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}(x - x_0) + \ldots + \binom{n}{n}x_0^0(x - x_0)^n - x_0^n}{(x - x_0)} \\
&= \binom{n}{1}x_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}(x - x_0) + \ldots + \binom{n}{n}x_0^0(x - x_0)^{n-1} \\
&\longrightarrow \binom{n}{1}x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}\,, \quad \text{då } x \to x_0\,.
\end{aligned}$$

Exempel 3.4. Är funktionen $f(x) = |x|$ deriverbar i $x = 0$?
Lösning: Vi bildar differenskvoten:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1\,, & \text{då } x > 0; \\ -1\,, & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Vi drar slutsatsen att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ inte existerar, $f(x)$ är inte deriverbar i $x = 0$. Detta visar att kontinuitet i en punkt inte garanterar deriverbarhet i punkten. I detta fall har vi dock en **högerderivata** och en **vänsterderivata** i origo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1\,.$$

Sats 3.1. Om funktionen $f(x)$ är deriverbar i punkten x_0, så är $f(x)$ kontinuerlig i punkten.

Bevis: Vi har att

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0)\cdot 0 = 0\,, \text{ då } x \to x_0\,,$$

så $f(x) \to f(x_0)$ då $x \to x_0$. □

Vi har följande räkneregler för derivering:

Sats 3.2. Antag att funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara i punkten x_0. Då gäller det att

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,, \tag{3.3}$$

$$(Kf)'(x_0) = K\,f'(x_0)\,, \quad K \text{ är en konstant}\,, \tag{3.4}$$

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,, \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,, \quad \text{om } g(x_0) \neq 0\,. \tag{3.6}$$

Bevis: (Se föreläsningsanteckningar).

Exempel 3.5. Betrakta polynomet

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,.$$

Med stöd av formlerna (3.2) och (3.4) har vi att $\frac{d(a_k x^k)}{dx} = a_k\cdot k\cdot x^{k-1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Upprepad användning av formel (3.3) ger då derivatan av polynomet:

$$p'(x) = n\,a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1\,. \tag{3.7}$$

Exempel 3.6. Härled deriveringsformeln

$$Dx^{-n} = -nx^{-(n+1)}\,, \quad n \in \mathbb{Z}_+\,. \tag{3.8}$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

3.2 Trigonometriska funktioner

Vi fortsätter härledningen av deriveringsregler för de elementära funktionerna. Betrakta först funktionen $f(x) = \sin x$. Med stöd av formeln

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

bildar vi differenskvoten

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} \\ &= \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\Big(\frac{2x+h}{2}\Big) \longrightarrow \cos x\,, \text{ då } h \to 0\,.\end{aligned}$$

Därmed gäller formeln

$$D\sin x = \cos x\,. \tag{3.9}$$

På ett analogt sätt härleds formeln

$$D\cos x = -\sin x\,. \tag{3.10}$$

Betrakta funktionen $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Med stöd av Sats 3.2 och formlerna (3.9) och (3.10) erhålls

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$

vilket ger deriveringsregeln

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,. \tag{3.11}$$

På ett liknande sätt får vi att

$$D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)\,. \tag{3.12}$$

3.3 Logaritmfunktioner

För att härleda derivatan av logaritmfunktionen

$$f(x) = {}^a\!\log x\,, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1\,,$$

utför vi först ett basbyte till den naturliga logaritmen

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}\,,$$

och studerar differenskvoten:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{\ln(x+h)}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln a}}{h} = \frac{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\ln a} = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}}{\ln a} \\
&\left(\text{Sätt } \frac{h}{x} = \frac{1}{t}, \text{ varvid } t \to \pm\infty \text{ då } h \to 0^{\pm}.\right) \\
&= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t/x}}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \\
&\longrightarrow \frac{1}{x \ln a} \cdot \ln e = \frac{1}{x \ln a}\,, \text{ då } t \to \pm\infty\,.
\end{aligned}$$

Därmed erhålls formeln

$$D\,{}^a\!\log x = \frac{1}{x \ln a}\,, \quad x > 0\,. \tag{3.13}$$

Speciellt för $a = e$ gäller

$$D \ln x = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0\,. \tag{3.14}$$

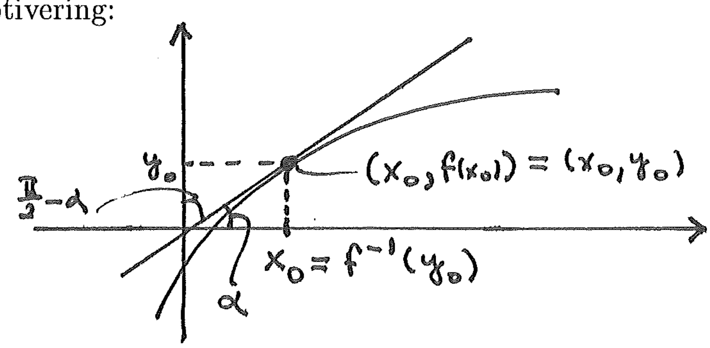
Exempel 3.7. Beräkna

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x\, \ln x}{x + 1}\right), \quad x > 0\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

3.4 Derivata av invers

Innan vi bevisar satsen om derivata av inversa funktionen ger vi en geometrisk motivering:



Vi utläser sambanden $\tan\alpha = f'(x_0)$ och $\tan(\pi/2 - \alpha) = (f^{-1})'(y_0)$ och får

$$(f^{-1})'(y_0) = \tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Vi ger även ett analytiskt bevis av sakförhållandet.

Sats 3.3. Antag att funktionen f har en invers funktion som är kontinuerlig. Om f är deriverbar i punkten $x = x_0$ och $f'(x_0) \neq 0$, så är f^{-1} deriverbar i punkten $y_0 = f(x_0)$ och

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,, \quad (y_0 = f(x_0))\,. \tag{3.15}$$

Bevis: Vi har att $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Eftersom f^{-1} är kontinuerlig gäller $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ då $y \to y_0$. Alltså: $x \to x_0$ då $y \to y_0$. Vi studerar differenskvoten,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}\,, \text{ då } y \to y_0\,. \quad \square$$

Formel (3.15) kan, om vi byter y_0 mot x och x_0 mot y, skrivas som

$$(Df^{-1})(x) = \frac{1}{Df(y)}\,, \quad x = f(y)\,, \tag{3.16}$$

och mera kortfattat som $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ eller $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Exempel 3.8. Härled formeln

$$Dx^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\,, \quad x > 0,\ n \in \mathbb{Z}_+\,. \tag{3.17}$$

3.5 Exponential- och arcusfunktioner

Logaritmfunktionen

$$y = f(x) = {}^a\log x\,, \quad a > 0\,,$$

har exponentialfunktionen

$$x = f^{-1}(y) = a^y$$

som sin invers. En tillämpning av Sats 3.3 och formel (3.13) ger att

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0 \ln a}} = x_0 \ln a = a^{y_0} \ln a\,.$$

Därmed får vi formeln för derivering av exponentialfunktioner,

$$D\,a^x = a^x \ln a\,, \quad a > 0\,, \tag{3.18}$$

och speciellt för $a = e$,

$$D\,e^x = e^x\,. \tag{3.19}$$

Exempel 3.9. Givet funktionen $f(x) = x\,e^x$, $x \geq 0$. Beräkna $(f^{-1})'(e)$. (Se föreläsningsanteckningar.)

Funktionen

$$y = f(x) = \sin x\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,$$

har inversen

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y\,, \quad -1 < y < 1\,.$$

En tillämpning av Sats 3.3 och formel (3.9) ger då att

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,, \quad -1 < y < 1\,,$$

så vi erhåller deriveringsregeln

$$D\,\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{3.20}$$

På analogt sätt behandlas funktionen

$$y = f(x) = \cos x\,, \quad 0 < x < \pi\,,$$

som har inversen

$$x = f^{-1}(y) = \arccos y\,, \quad -1 < y < 1\,,$$

och vi får att

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}\,, \quad -1 < y < 1\,,$$

således gäller

$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{3.21}$$

Vidare för funktionen

$$y = f(x) = \tan x\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

har vi inversen

$$x = f^{-1}(y) = \arctan y\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

och därmed gäller det att

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\,, y \in \mathbb{R}\,,$$

så vi får deriveringsregeln

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.22}$$

För funktionen

$$y = f(x) = \cot x\,, \quad 0 < x < \pi\,,$$

ges inversen av

$$x = f^{-1}(y) = \operatorname{arccot} y\,,\ y \in \mathbb{R}\,,$$

och slutligen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-(1+\cot^2 x)} = \frac{1}{-(1+y^2)}\,, y \in \mathbb{R}\,,$$

vilket ger deriveringsregeln

$$D\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.23}$$

3.6 Derivata av sammansatt funktion

I avsnitt 1.12 definierade vi den sammansatta funktionen

$$u(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

där f kallas yttre och g inre funktion. Vi presenterar nu **kedjeregeln** för derivering av sammansatta funktioner.

Sats 3.4. Kedjeregeln. Om funktionen g är deriverbar i punkten x och funktionen f är deriverbar i punkten $g(x)$ så är den sammansatta funktionen

$$u(x) = f(g(x))$$

deriverbar i punkten x med derivatan

$$u'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{3.24}$$

Bevis: Antag att $g(x+h) \neq g(x)$ för alla h i en punkterad omgivning av 0, $]-\lambda, 0[\cup]0, \lambda[$, för något $\lambda > 0$. Vi bildar differenskvoten i en sådan omgivning och beaktar att $g(x+h) \to g(x)$ då $h \to 0$, eftersom g är kontinuerlig i punkten x,

$$\begin{aligned}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &\longrightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x), \text{ då } h \to 0. \quad \square\end{aligned}$$

Observera att satsen gäller även utan antagandet att $g(x+h) \neq g(x)$ för alla h i en liten punkterad omgivning av 0. (Beviset blir mera tekniskt utan antagandet, se kursboken).

Sätter vi $y = g(x)$ och $u = f(y)$ kan (3.24) skrivas i den korta formen

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{3.25}$$

Exempel 3.10. Funktionen $u(x) = (1+x^2)^n$ är sammansatt av $f(x) = x^n$ och $g(x) = 1+x^2$, dvs. $u(x) = f(g(x))$, $f'(x) = nx^{n-1}$ och $g'(x) = 2x$. Då ger kedjeregeln att

$$u'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = n(1+x^2)^{n-1} \cdot 2x.$$

Exempel 3.11. Beräkna $D \ln(\sin(\cos x))$. (Se föreläsningsanteckningar.)

3.7 Potensfunktioner

För potensfunktioner

$$u(x) = x^a\,, \quad x > 0\,,\ a \in \mathbb{R}\,,$$

gör vi omskrivningen

$$u(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x} = f(g(x))\,,$$

där $f(x) = e^x$ och $g(x) = a \ln x$. Då ger kedjeregeln att

$$u'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = e^{a \ln x}\, \frac{a}{x} = a\, x^{a-1}\,.$$

Vi har då deriveringsregeln för potensfunktioner

$$D\, x^a = a x^{a-1}\,, \quad x > 0\,,\ a \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Exempel 3.12. För funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ erhålls derivatan

$$D\sqrt{x} = D\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, \quad x > 0\,.$$

3.8 Hyperboliska funktioner

Med hjälp av definitionerna på de hyperboliska funktionerna verifierar man lätt att de är deriverbara med derivatorna

$$D\, \sinh x = \cosh x\,, \tag{3.27}$$

$$D\, \cosh x = \sinh x\,, \tag{3.28}$$

$$D\, \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}\,, \tag{3.29}$$

$$D\, \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}\,, \quad x \neq 0\,. \tag{3.30}$$

3.9 Några viktiga exempel

De två första exemplena är viktiga och kommer att visa sig användbara vid bestämning av primitiva funktioner, vilket behandlas i del 2 av kursen.

Exempel 3.13. Betrakta funktionen

$$f(x) = \ln|x|, \quad x \neq 0.$$

För $x > 0$ gäller

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

För $x < 0$ gäller

$$f(x) = \ln(-x), \quad f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Vi har alltså formeln

$$D \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \tag{3.31}$$

Exempel 3.14. Logaritmiska derivatan. Antag att $f(x)$ är en deriverbar funktion och definiera funktionen

$$F(x) = \ln|f(x)|.$$

Med hjälp av kedjeregeln och formel (3.31) får vi

$$F'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

vilket ger formeln för den logaritmiska derivatan av f.

$$D \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{3.32}$$

Exempel 3.15. Antag att g och h är deriverbara funktioner, med $g(x) > 0$, och definiera

$$f(x) = g(x)^{h(x)} .$$

Då kan vi göra omskrivningen

$$f(x) = e^{\ln g(x)^{h(x)}} = e^{h(x) \ln g(x)}$$

vilket gör det möjligt att bestämma derivatan av f,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{h(x) \ln g(x)} \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \frac{1}{g(x)} g'(x)\right) \\ &= g(x)^{h(x)} \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}\right) . \end{aligned}$$

Exempel 3.16. Bestäm för $x > 0$ derivatan av funktionen $f(x) = x^x$. (Se föreläsningsanteckningar.)

Vid **implicit derivering** har vi en ekvation innehållande exempelvis två variabler x och y av vilka den ena kan tolkas som funktion av den andra och vars derivata ibland kan beräknas genom derivering av ekvationens vänster- och högerled. Vi betraktar ett exempel.

Exempel 3.17. Punkterna (x, y) på den övre halvcirkelbågen av den origocentrerade cirkeln med radie 2 satisfierar ekvationen

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 , \quad y > 0 .$$

Här kan variabeln y betraktas som funktion av x, nämligen $y = y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ och vi kan beräkna $y'(x)$ genom **direkt derivering**. Vi kan också skriva om ekvationen i formen

$$x^2 + y(x)^2 - 4 = 0 ,$$

och utföra **implicit derivering**, vilket betyder att båda leden deriveras med avseende på variabeln x,

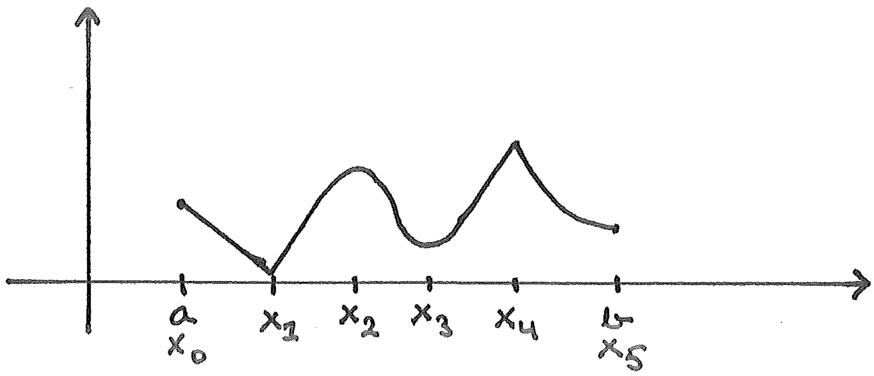
$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 ,$$

och vi erhåller

$$y'(x) = -\frac{2x}{2y(x)} = -\frac{x}{y(x)} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} .$$

3.10 Lokala extrempunkter och medelvärdessatsen

Betrakta en kontinuerlig funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.



Denna funktion har ett lokalt maximum i punkterna: x_0, x_2, x_4 och ett lokalt minimum i punkterna: x_1, x_2, x_5. Den har ett globalt maximum i punkten x_4 och ett globalt minimum i punkten x_1.

Definition 3.3. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har ett **lokalt maximum** (**minimum**) i punkten x_0 om det finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$(x \in D_f \text{ och } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \;\; (f(x) \geq f(x_0)) . \tag{3.33}$$

Om $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ har vi ett **strängt lokalt maximum** (**strängt lokalt minimum**). Lokala maxima och minima kallas **extremvärden** och lokala maximi- och minimipunkter kallas lokala **extrempunkter**.

En punkt $x_0 \in D_f$ är en **stationär punkt** för f om $f'(x_0) = 0$. (Derivatans nollställen ger de stationära punkterna).

Sats 3.5. Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning av punkten x_0 och deriverbar i x_0 och om x_0 är en lokal extrempunkt för f, så är x_0 en stationär punkt.

Bevis: Antag att x_0 är en lokal maximipunkt (analogt bevis för lokal minimipunkt). Då finns det ett $\delta > 0$ så att om $x \in [x_0 - \delta, x_0]$ $(x \in [x_0, x_0 + \delta])$ så gäller det för differenskvoten att

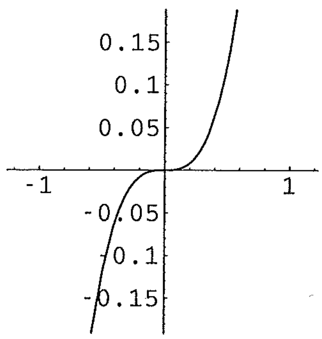
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\right) .$$

Men då gäller det att

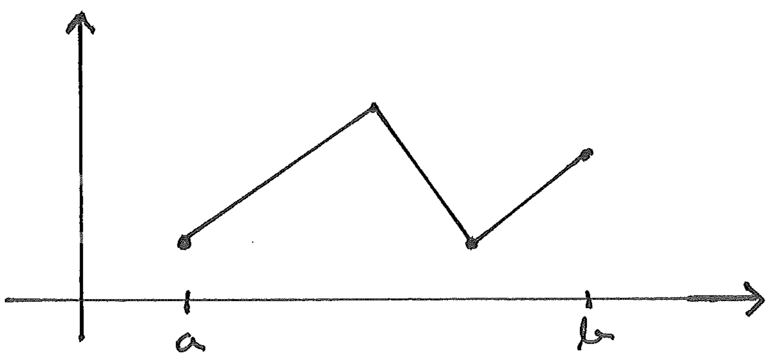
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{och} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$$

Eftersom f är deriverbar i x_0 gäller det att $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Enda möjligheten är då att $f'(x_0) = 0$. □.

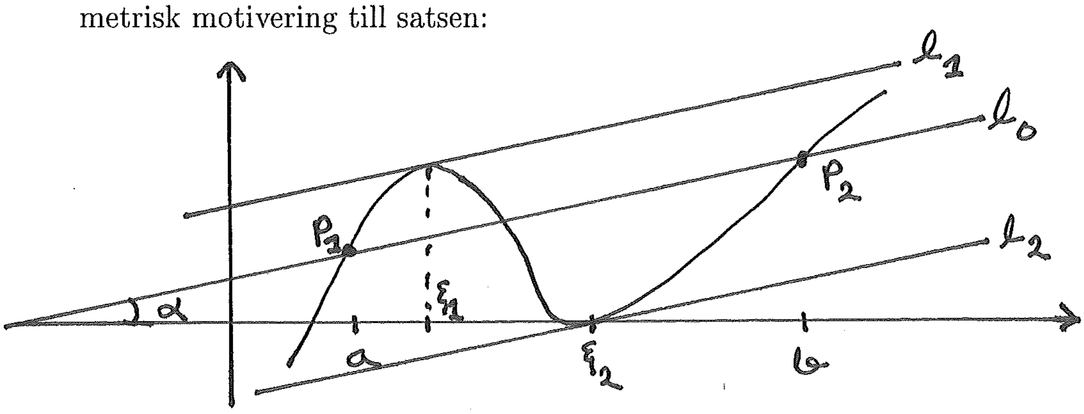
Observera att omvändningen till satsen gäller ej. Ett exempel på detta är funktionen $f(x) = x^3$ för vilken $f'(0) = 0$, så 0 är en stationär punkt men **inte en lokal extrem punkt**, utan en så kallad **terasspunkt**.



En funktion kan ha andra extrempunkter än stationära punkter. Nämligen punkter där derivatan inte är definierad och intervalländpunkter.



Vi skall utan bevis presentera **medelvärdessatsen**. Vi ger dock en geometrisk motivering till satsen:



Riktningskoefficienten för linjen l_0 genom P_1 och P_2 ges av

$$\tan\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Linjerna l_1 och l_2 är båda parallella med linjen l_0, så vi har

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi_2).$$

Sats 3.6. Medelvärdessatsen. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och att $f'(x)$ existerar i det öppna intervallet $]a,b[$. Då finns det minst en punkt $\xi \in]a,b[$ sådan att

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)\,(b-a). \tag{3.34}$$

Exempel 3.18. Det gäller för alla reella tal $x_1 < x_2$ att

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \le |x_2 - x_1|, \quad (*)$$

ty med stöd av medelvärdessatsen finns det ett ξ i intervallet $]x_1, x_2[$ sådant att

$$\cos x_2 - \cos x_1 = (-\sin\xi)\,(x_2 - x_1).$$

Då $-\sin\xi$ tillhör intervallet $[-1,1]$ för alla val av $x_1 < x_2$, så måste formel $(*)$ gälla.

Sats 3.7. Antag att f är kontinuerlig på det slutna intervallet $I = [a, b]$ och deriverbar i det öppna intervallet $]a, b[$. Då gäller:

1. Om $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) på intervallet $]a, b[$, så är f växande (avtagande) på intervallet I.

2. Om $f'(x) > 0$ (< 0) på intervallet $]a, b[$, så är f strängt växande (strängt avtagande) på intervallet I.

3. Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in]a, b[$, så är f konstant på intervallet I.

Bevis: 1. Vi utför beviset för $f'(x) \geq 0$ på intervallet $]a, b[$, beviset är analogt i det andra fallet. Välj godtyckligt $x_1, x_2 \in I$ sådana att $x_1 < x_2$. Då finns med stöd av medelvärdessatsen ett $\xi \in]x_1, x_2[$ sådant att

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0\,,$$

vilket medför att $f(x_2) \geq f(x_1)$ och f är växande på intervallet I.

2. Antag nu att $f'(x) > 0$ på intervallet $]a, b[$ och att $x_1, x_2 \in I$ är godtyckligt valda med $x_1 < x_2$. Då erhålls för något ξ i $]x_1, x_2[$ att

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0\,,$$

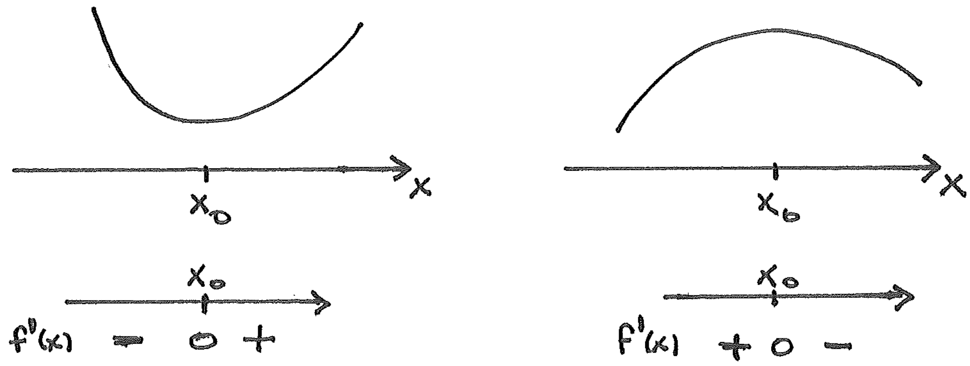
så $f(x_2) > f(x_1)$ gäller och f är strängt växande på intervallet I. Beviset för att $f'(x) < 0$ på intervallet medför att f är strängt avtagande är analogt.

3. Antag att $f'(x) = 0$ för alla $x \in]a, b[$ och tag godtyckligt $x_1, x_2 \in I$, sådana att $x_1 < x_2$. Med stöd av medelvärdessatsen finns ett $\xi \in]x_1, x_2[$ sådant att

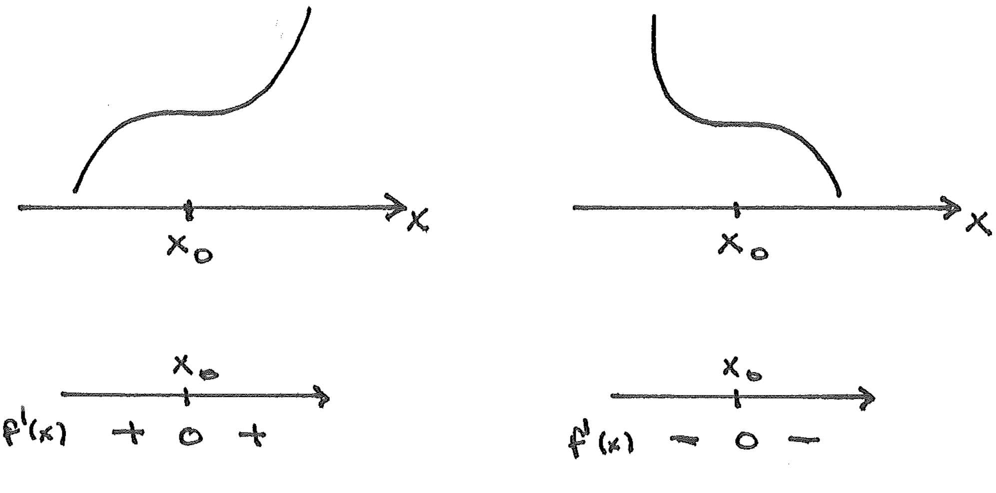
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0\,,$$

alltså gäller det att $f(x_1) = f(x_2)$ och f är konstant på intervallet I. □

En konsekvens av Sats 3.7 är att karaktären av en stationär punkt x_0, (där $f'(x_0) = 0$), med avseende på lokal maximi- eller minimipunkt för $f(x)$, kan avgöras genom att studera **derivatans teckenväxling** i en omgivning av x_0. Om derivatan är negativ (positiv) i en punkterad vänsteromgivning $]x_0 - \delta, x_0[$ av x_0 och positiv (negativ) i en punkterad högeromgivning $]x_0, x_0 + \delta[$ av x_0, så är x_0 en lokal minimipunkt (maximipunkt) för $f(x)$.
sträng



Om derivatan inte byter tecken har vi en **terasspunkt**. I detta fall är x_0 inte en lokal extrempunkt.



3.11 Tillämpningar av derivator

En tillämpning där derivatan spelar en viktig roll är kurvritning av en funktion $f(x)$. Vi kan dela upp denna process i delsteg:

1. Beräkna derivatan och **stationära punkter**. Studera **derivatans teckenväxling** för att avgöra i vilka intervall funktionen är strängt växande respektive strängt avtagande. Undersök teckenväxlingen vid stationära punkter för att bestämma lokala maxima och minima.

2. Bestäm, ifall det är möjligt, **nollställena till funktionen** f. Undersök **intervalländpunkter** och eventuellt **gränsvärden då** $x \to \pm\infty$, punkter där **derivatan är odefinierad** samt punkter där **funktionen** f **är odefinierad**. Dessa undersökningar kräver ofta beräknande av vänster- och högergränsvärden.

3. Gör på basen av undersökningarna i punkt 1. och 2. en **skiss av funktionskurvan**.

Vi ger ett exempel på tillvägagångssättet.

Exempel 3.19. Gör en skiss av grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x\,e^{-x^2}}{x-2}, \quad x < 2.$$

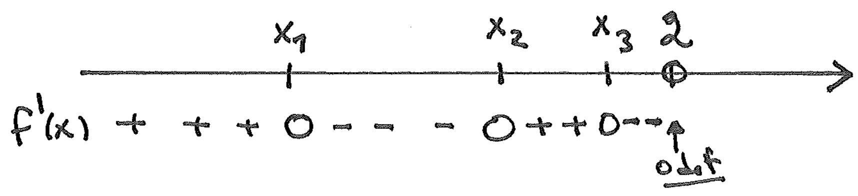
Lösning: 1. Derivatan av $f(x)$ ges av

$$f'(x) = -\frac{2(1-2x^2+x^3)e^{-x^2}}{(x-2)^2}, \quad x < 2,$$

vilket ger tre **stationära punkter**:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ (\approx -0.618), \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\approx 1.618).$$

Då får vi **teckenväxlingen** för derivatan enligt schemat:



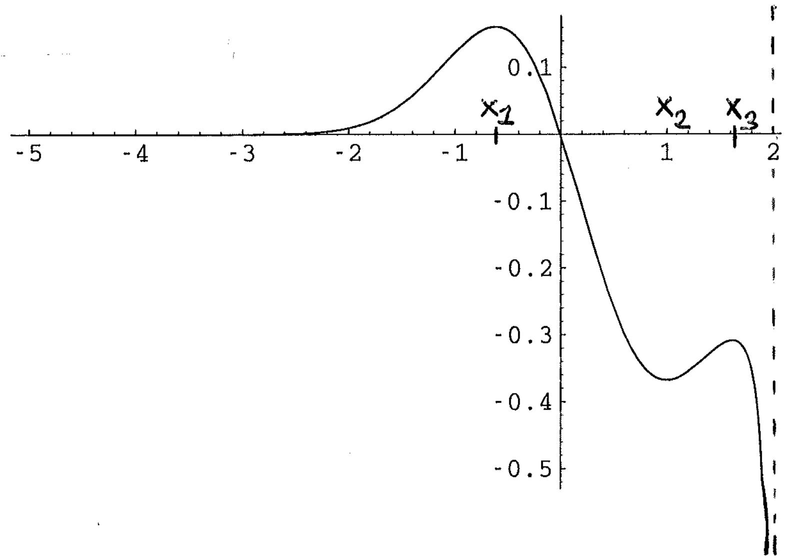
Schemat ger att $f(x)$ är strängt växande i intervallen $]-\infty, x_1]$ och $[x_2, x_3]$, samt strängt avtagande i intervallen $[x_1, x_2]$ och $[x_3, 2[$. Vidare ser vi att x_1, x_2, x_3 är alla lokala extrempunkter och teckenväxlingen ger:

$$f(x_1) = \frac{(\sqrt{5}-1)e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}}{3+\sqrt{5}} \; (\approx 0.161)\,, \qquad \textbf{lokalt maxima},$$
$$f(x_2) = -e^{-1} \; (\approx -0.368)\,, \qquad \textbf{lokalt minima},$$
$$f(x_3) = \frac{(1+\sqrt{5})e^{-\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}}}{\sqrt{5}-3} \; (\approx -0.309)\,, \qquad \textbf{lokalt maxima}.$$

2. Funktionen $f(x)$ har ett **nollställe** i punkten $x = 0$. Vidare gäller det att

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 0\,,$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x\,e^{-x^2}}{x-2} = -\infty\,.$$

3. På basen av informationen i punkt 1. och 2. kan vi skissa grafen till $f(x)$:



En annan tillämpning av derivator är för att bevisa att olikheter gäller i vissa intervall. Vi belyser metodiken med ett exempel.

Exempel 3.20. Visa att

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

för alla $x \geq 0$

Lösning: Problemet är ekvivalent med att visa att

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} > 0$$

för alla $x \geq 0$. Vi studerar derivatan av $f(x)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2)\cdot 1 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{2}{(1+x^2)^2}, \end{aligned}$$

och observerar att

$$f'(x) < 0 \text{ då } x \geq 0 .$$

Detta betyder att $f(x)$ är strängt avtagande i intervallet $[0, +\infty[$. Vad händer med $f(x)$ då $x \to +\infty$?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0 .$$

Därmed gäller det att

$$f(x) > 0 , \text{ då } x \geq 0 ,$$

och således har vi att

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2} - \arctan x , \quad \text{då } x \geq 0 . \quad \square$$

En tredje tillämpning av derivator är optimering. Antag att vi har en kontinuerlig funktion $f(x)$ på ett slutet (ändligt) intervall $[a, b]$. Då ger Sats 2.7 att $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde på intervallet. Antag vidare att $f(x)$ är deriverbar i öppna intervallet $]a, b[$. Då är de största och minsta värdena också lokala maxima och minima, och antas antingen i en stationär punkt eller i en intervalländpunkt. Om $f(x)$ inte är deriverbar i alla punkter i $]a, b[$ bör även funktionsvärdet i undantagspunkterna kontrolleras.

Exempel 3.21. Vilka är de största och minsta värdena som uttrycket

$$x + y^2$$

antar på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ och i vilka punkter antas extremvärdena?

Lösning: På enhetscirkeln gäller det att

$$y^2 = 1 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

så vi kan studera funktionen

$$f(x) = x + 1 - x^2$$

på intervallet $[-1, 1]$. Den är kontinuerlig på intervallet och deriverbar i det öppna intervallet $]-1, 1[$. Vi bestämmer de stationära punkterna

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Därmed räcker det att kontrollera funktionsvärdet i tre punkter

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1, && \textbf{minsta värdet}, \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \frac{5}{4}, && \textbf{största värdet}, \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

Då antar uttrycket $x + y^2$ på enhetscirkeln sitt minsta värde -1 i punkten $(-1, 0)$ och sitt största värde $\frac{5}{4}$ i punkterna $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

3.12 Derivator av högre ordning

Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar. Om i sin tur $f'(x)$ är deriverbar kan vi definiera **andraderivatan** av f genom

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}.$$

På analogt sätt defineras **tredjederivatan** av f. Om denna procedur kan itereras i n steg får vi **n:te derivatan** av f vilken kan betecknas på ett av följande sätt

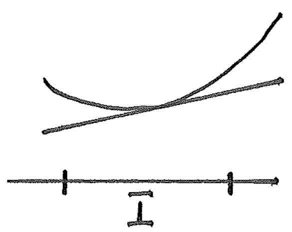
$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad \text{eller} \quad D^n f(x).$$

För funktioner f och g som är n gånger deriverbara har vi följande räkneregler

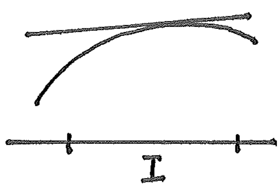
$$D^n(f+g) = D^n f + D^n g,$$

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}, \quad \textbf{Leibnitz' formel}.$$

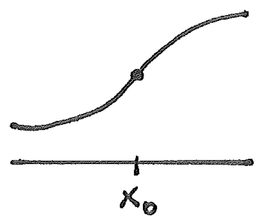
Antag att funktionen $f(x)$ är två gånger deriverbar i intervallet I. Om $f''(x) > 0$ på I så ligger grafen av f över sin tangent i varje punkt $x \in I$, vi har en **konvex** funktion. Om $f''(x) < 0$ på I så ligger grafen av f under sin tangent i varje punkt $x \in I$, vi har en **konkav** funktion. Om för $x_0 \in I$ gäller att $f''(x_0) = 0$ och $f''(x)$ byter tecken i x_0 har vi en **inflexionspunkt** där grafen växlar från att ha varit konkav (konvex) till att vara konvex (konkav).



Konvex funktion



Konkav funktion



Inflexionspunkt

3.13 Partiella derivator

I detta avsnitt, **som inte behöver läsas till tentamen**, skall vi kort definiera vad som avses med partiella derivator av avbildningar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exempel 3.22. Ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ges av $f(x, y, z)$ definierad genom

$$f(x, y, z) = e^{xyz} \sin(xy) .$$

Definition 3.4. Antag att funktionen $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ är definierad i en omgivning av punkten $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h}$$

existerar, så är f **partiellt deriverbar** med avseende på variabeln x_k i punkten a. Den **partiella derivatan** med avseende på variabeln x_k i punkten a betecknas

$$f'_k(a) , \quad f'_{x_k}(a) , \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) .$$

Exempel 3.23. Beräkna partiella derivatorna av funktionen

$$f(x, y, z) = e^{xyz} \sin(xy) .$$

Lösning: Vi deriverar först med avseende på variabeln x. Då betraktas y och z som konstanter och vi kan tillämpa vanliga deriveringsregler för funktioner av en variabel,

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= e^{xyz} \cdot yz \cdot \sin(xy) + e^{xyz} \cdot \cos(xy) \cdot y \\ &= e^{xyz}(yz \sin(xy) + y \cos(xy)) . \end{aligned}$$

Då vi deriverar med avseende på y betraktas x och z som konstanter.

$$\begin{aligned} f'_y(x, y, z) &= e^{xyz} \cdot xz \cdot \sin(xy) + e^{xyz} \cdot \cos(xy) \cdot x \\ &= e^{xyz}(xz \sin(xy) + x \cos(xy)) . \end{aligned}$$

Slutligen deriverar vi med avseende på z.

$$f'_z(x, y, z) = e^{xyz} \cdot xy \cdot \sin(xy) .$$

Vi har även en **kedjeregel** för derivering av sammansatta funktioner av typen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Vi har då att

$$g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t)),$$

och vi får den sammansatta funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad av

$$u(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)).$$

Om $g_1(t), ..., g_n(t)$ har kontinuerliga derivator i punkten t_0 och de partiella derivatorna av $f(x_1, ..., x_n)$ är kontinuerliga i en omgivning av punkten $g(t_0)$, så är den sammansatta funktionen deriverbar i punkten t_0 med derivatan

$$u'(t_0) = f_1'(g(t_0)) \cdot g_1'(t_0) + f_2'(g(t_0)) \cdot g_2'(t_0) + ... + f_n'(g(t_0)) \cdot g_n'(t_0).$$

Om vi sätter $u = u(x(t)) = u(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ kan vi skriva kedjeregeln i formen

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}.$$

Exempel 3.24. Antag att funktionerna $f(x, y)$ och $g(t)$ uppfyller de krav som ställs för att kedjeregeln skall kunna användas, där

$$g(t) = (\cos t, \sin t) = (g_1(t), g_2(t)).$$

Då ges derivatan av den sammansatta funktionen

$$u(t) = f(g(t)) = f(\cos t, \sin t)$$

av

$$u'(t) = f_x'(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t) + f_y'(\cos t, \sin t) \cdot \cos t.$$