2 Gränsvärden

2.1 Definitioner och räkneregler

Vi har i kapitel 1 behandlat frågeställningar som: " Hur uppför sig en funktion $f(x)$ då $x \to \pm\infty$ eller $x \to 0$". Vi skall ge precisa definitioner av begreppet gränsvärde i olika fall som kan förekomma. Först behandlar vi gränsvärden där $x \to +\infty$ och betraktar inledningsvis ett exempel.

Exempel 2.1. Låt funktionen f vara given av

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Då verkar det klart att $f(x) \to 1$ då $x \to +\infty$, ty $1/\sqrt{x}$ avtar mot 0 då x växer. Vi gör en exaktare analys:

$$\begin{aligned} &|f(x) - 1| = |1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}. \\ &\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{10}, \quad \text{om } \sqrt{x} > 10\,, \text{ dvs. om } x > 100\,, \\ &\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{100}, \quad \text{om } \sqrt{x} > 100\,, \text{ dvs. om } x > 10000\,, \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$,

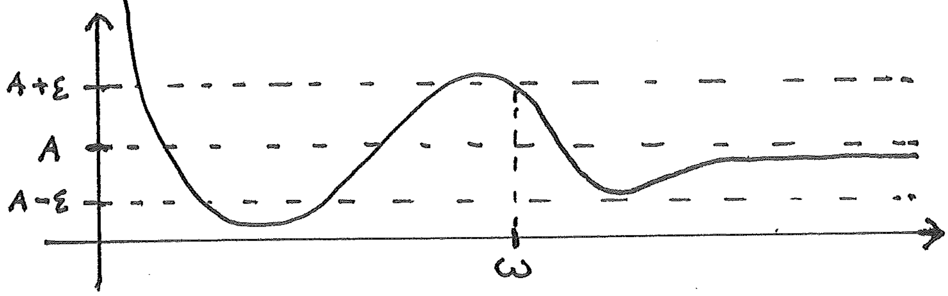
$$|f(x) - 1| = \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon\,, \quad \text{om } \sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}\,, \text{ dvs. om } x > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = \omega\,(= \omega(\varepsilon))\,.$$

Definition 2.1. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad för godtyckligt stora reella tal, ($D_f \cap [a, +\infty[\neq \emptyset$ för alla $a > 0$). Då har $f(x)$ **gränsvärdet** A då x går mot oändligheten om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\omega = \omega(\varepsilon)$ sådant att

$$(x > \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Detta betecknas

$$f(x) \to A \text{ då } x \to +\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = A\,.$$



Exempel 2.2. Visa med stöd av definitionen att

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin x}{1+x^2} = 1 .$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

Exempel 2.3. Funktionen $f(x) = \cos x$ saknar gränsvärde då $x \to +\infty$, eftersom den i varje intervall $[a, +\infty[$, $a > 0$, antar alla värden i intervallet $[-1, 1]$. Funktionsvärdena "samlar sig inte kring något värde A".

Exempel 2.4. En talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ kan tolkas som en funktion med $D_f = \mathbb{N}$. Om en talföljd har ett gränsvärde då $n \to \infty$, säger vi att den är **konvergent**, i annat fall är den **divergent**. Exempelvis är talföjden $(1 + n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet 1, medan talföljden $((-2)^n)_{n=0}^{\infty}$ är divergent.

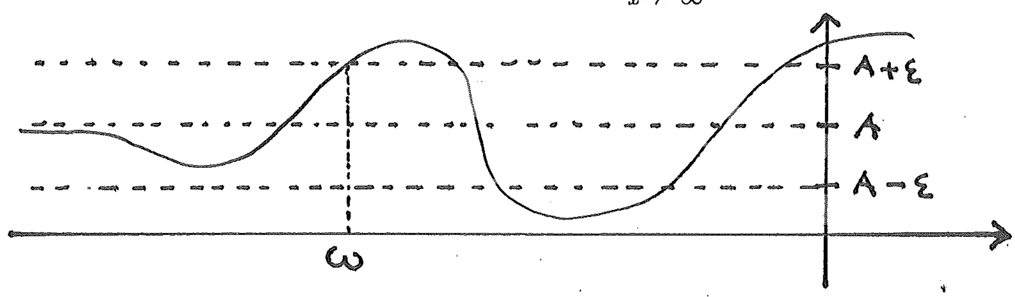
Vi har en analog definition på gränsvärde då $x \to -\infty$.

Definition 2.2. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad för godtyckligt små reella tal, $(D_f \cap]-\infty, a] \neq \emptyset$ för alla $a < 0)$. Då har $f(x)$ **gränsvärdet** A då x går mot minus oändligheten om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\omega = \omega(\varepsilon)$ sådant att

$$(x < \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

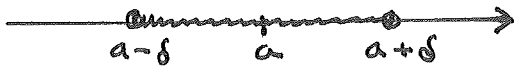
Detta betecknas

$$f(x) \to A \text{ då } x \to -\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A .$$



Antag att a och $\delta > 0$ är givna tal. En **omgivning** av talet a är en mängd av formen

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\} =]a-\delta, a+\delta[\,.$$



Vi kan då definera begreppet gränsvärde då $x \to a$.

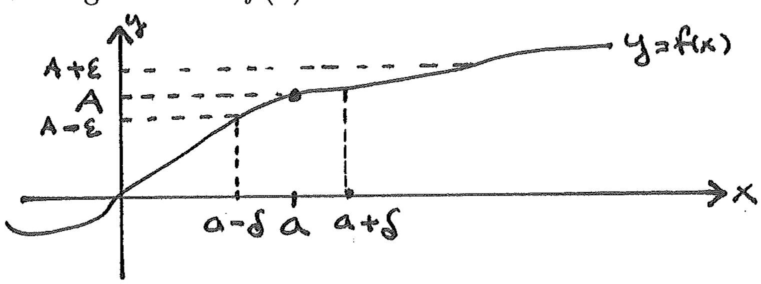
Definition 2.3. Antag att f är en funktion sådan att varje omgivning av punkten $a \in \mathbb{R}$ innehåller punkter ur D_f. Då har $f(x)$ gränsvärdet A då x går mot a om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sådant att

$$(|x-a| < \delta \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Detta betecknas

$$f(x) \to A \text{ då } x \to a \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a} f(x) = A\,.$$

Observera: 1. Om $a \in D_f$ och $f(x) \to A$ då $x \to a$, så gäller $A = f(a)$. 2. Om man i definitionen ovan byter $|x-a| < \delta$ mot $a \leq x < a + \delta$ eller $a - \delta < x \leq a$, fås definitionen på högergränsvärde, $f(x) \to A$ då $x \to a^+$, respektive vänstergränsvärde $f(x) \to A$ då $x \to a^-$.



Exempel 2.5. Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Då gäller

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \sqrt{2}\,,$$

ty för varje $\varepsilon > 0$ gäller:

$$|f(x) - \sqrt{2}| = |\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{2}|\,|\sqrt{x} + \sqrt{2}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{2}|} = \frac{|x-2|}{|\sqrt{x} + \sqrt{2}|}$$

$$= \frac{|x-2|}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} < \frac{|x-2|}{\sqrt{2}} < \varepsilon, \text{ om } |x-2| < \sqrt{2} \cdot \varepsilon = \delta\,.$$

För alla $\varepsilon > 0$ och $\delta = \sqrt{2} \cdot \varepsilon$ gäller: $|x-2| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \varepsilon$.

Om $f(x) \to +\infty$ eller $-\infty$ då $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ eller $x \to a$ har vi att göra med **oegentliga gränsvärden**.

Definition 2.4. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad för godtyckligt stora reella tal, ($D_f \cap [a, +\infty[\neq \emptyset$ för alla $a > 0$). Då har $f(x)$ det **oegentliga gränsvärdet** (a) $+\infty$ eller (b) $-\infty$, då x går mot oändligheten, om det till varje tal $\lambda \in \mathbb{R}$ finns ett tal ω sådant att

$$(a)\ (x > \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow f(x) > \lambda\,,$$
$$\text{eller}$$
$$(b)\ (x > \omega \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow f(x) < \lambda\,.$$

Detta betecknas

$$(a)\ f(x) \to +\infty, \text{ då } x \to +\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$
$$\text{eller}$$
$$(b)\ f(x) \to -\infty, \text{ då } x \to +\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Vi har en analog definition på oegentligt gränsvärde då $x \to -\infty$.

Exempel 2.6. Betrakta funktionen $f(x) = x^n\,, \quad n \in \mathbb{Z}_+$.
Om vi väljer $\omega = \sqrt[n]{\lambda} = \lambda^{1/n}$, $\lambda > 0$, så gäller:

$$x > \omega \Rightarrow f(x) = x^n > (\lambda^{1/n})^n = \lambda\,.$$

Alltså gäller det att

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Vi definerar begreppet oegentligt gränsvärde då $x \to a$.

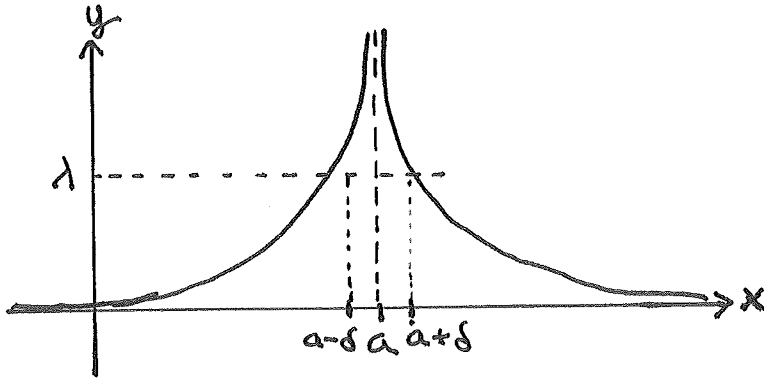
Definition 2.5. Antag att f är en funktion sådan att varje punkterad omgivning, $0 < |x - a| < \delta$, av punkten $a \in \mathbb{R}$ innehåller punkter ur D_f. Då har $f(x)$ gränsvärdet $+\infty\,(-\infty)$ då x går mot a om det till varje tal $\lambda \in \mathbb{R}$ finns ett tal $\delta = \delta(\lambda) > 0$ sådant att

$$(0 < |x - a| < \delta \text{ och } x \in D_f) \Rightarrow f(x) > \lambda\ (f(x) < \lambda)\,.$$

Detta betecknas

$$f(x) \to +\infty\ (-\infty) \text{ då } x \to a \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty\ (-\infty)\,.$$

Observera: Om man i definitionen ovan byter $0 < |x - a| < \delta$ mot $a < x < a + \delta$ eller $a - \delta < x < a$, fås definitionen på högergränsvärde, $f(x) \to +\infty$ $(-\infty)$ då $x \to a^+$, respektive vänstergränsvärde $f(x) \to +\infty$ $(-\infty)$ då $x \to a^-$.



Exempel 2.7. Vi har att

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty\,,$$

ty om $0 < |x - 0| < 1/\sqrt{\lambda} = \delta > 0$, så gäller för alla $\lambda > 0$ att

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{(1/\sqrt{\lambda})^2} = (\sqrt{\lambda})^2 = \lambda\,.$$

Räkneregler för gränsvärden

Vi skall utan bevis ge ett antal räkneregler för gränsvärdestagning. Endel har vi de facto redan tillämpat i Kapitel 1. För bevisen hänvisas till avsnitt 2.1 i kursboken. Reglerna gäller för alla typer av gränvärden, $(x \to +\infty\,, x \to a\,, x \to a^+, \ldots)$, så vi gör ingen specificering i formuleringen av reglerna.

Definition 2.6. Vi säger att en funktion $g(x)$ är **begränsad** i en mängd I om det finns ett tal $M > 0$ så att $|g(x)| \leq M$ för alla $x \in I$. En omgivning av $+\infty$ $(-\infty)$ är ett intervall av formen $]a, +\infty[$ $(] - \infty, a[)$.

Sats 2.1. Antag att $\lim f(x) = 0$ och att funktionen $g(x)$ är begränsad i en omgivning av punkten som gränsvärdet tas i. Då gäller

$$\lim f(x)\, g(x) = 0\,.$$

Exempel 2.8. Eftersom funktionen $g(x) = \cos x$ är begränsad i hela $\mathbb{R}$ gäller

$$\lim_{x\to 0} x\,\cos x = 0, \quad \text{och} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0\,.$$

Observera att om man i tillämpningar av de regler som presenteras i detta avsnitt erhåller uttryck av formen

$$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ \text{eller } 0^{0}\,,$$

så kan ingen slutsats dras om eventuellt gränvärde, utan vidare undersökningar (via omskrivningar) måste göras.

Sats 2.2. Antag att $\lim f(x) = A$ och $\lim g(x) = B$, där $A, B \in \mathbb{R}$. Då gäller:

$$1.\ \lim(f(x) + g(x)) = A + B\,, \tag{2.1}$$

$$2.\ \lim f(x)\cdot g(x) = A\cdot B\,, \tag{2.2}$$

$$3.\ \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,, \quad \text{om } B \neq 0\,. \tag{2.3}$$

Exempel 2.9. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x + 2}{3 + x^2}\,.$$

Lösning: Det gäller att $x \to 0$, $\sin x \to 0$ och $2 \to 2$ då $x \to 0$, så regel (2.1) ger att $(x + \sin x + 2) \to 0 + 0 + 2 = 2$, då $x \to 0$. Vidare ger (2.2) att $x^2 = x\cdot x \to 0\cdot 0 = 0$, så med stöd av (2.1) erhålls att $(3 + x^2) \to 3 + 0 = 3$ då $x \to 0$. Slutligen ger regel (2.3) att det eftersökta gränsvärdet är

$$\frac{0+0+2}{3+0\cdot 0} = \frac{2}{3}\,.$$

Exempel 2.10. En direkt tillämpning av räknereglerna på gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x + \sin x}{2x + x^4}$$

ger formen $\frac{0}{0}$, som är obestämd och kräver en omformning av uttrycket. (Se föreläsningsanteckninger.)

Exempel 2.11. Vid beräkning av gränsvärdet

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

ger en direkt gränsövergång det obestämda uttrycket $\infty - \infty$. Här kan man **förlänga med konjugatuttrycket**. (Se föreläsningsanteckningar.)

Följande sats ger en användbar **sammansättningsregel**.

Sats 2.3. Antag att $g(x) \to a$ då $x \to x_0$ och att $f(t) \to A$ då $t \to a$. (Vi kan här tillåta att A och a är $\pm\infty$). Då gäller

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A\,.$$

Exempel 2.12. Antag att $g(x) \to 0$ då $x \to 0$. Eftersom $f(x) \to 1$ då $x \to 0$ för $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, ger Sats 2.3 att

$$f(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{g(x)} \to 1\,, \quad \text{då } x \to 0\,.$$

Exempel 2.13. Beräkna

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\,.$$

Lösning: Vi övergår till en ny variabel och använder sammansättningsregeln. Sätt $y = \arctan x$, varvid $x = \tan y$ och $y \to 0$ då $x \to 0$. Då erhålls

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{y}{\tan y} = \frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}} \to \frac{1}{1} = 1\,, \quad \text{då } x \to 0\,.$$

Följande viktiga exempel behandlar ett **standardgränsvärde**.

Exempel 2.14. För $\alpha > 0$ och $a > 1$ gäller

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\, {}^a\!\log x = 0\,. \tag{2.4}$$

Bevis: Direkt gränsövergång ger det obestämda uttrycket $0 \cdot (-\infty)$. Om vi inför variabeln $t = 1/x$ gäller $t \to +\infty$ då $x \to 0^+$, och sammansättningsregeln ger oss

$$x^\alpha\, {}^a\!\log x = (\frac{1}{t})^\alpha\, {}^a\!\log(1/t) = -\frac{{}^a\!\log t}{t^\alpha} \to 0\,, \quad \text{då } x \to 0^+\,,$$

med stöd av formel (1.23) i Sats 1.8. □

Speciellt ser vi ur (2.4) att

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 , \quad \text{då } \alpha > 0 .$$

Vi har följande **instängningsregel** och regel om **gränsövergång i olikhet**.

Sats 2.4. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ har gränsvärdena A respektive B då $x \to a$. Då gäller:

$$(f(x) \leq g(x) \text{ i en omgivning av } a) \Rightarrow A \leq B .$$

Om $A = B$ och $h(x)$ är en funktion som i en omgivning av punkten a uppfyller

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) ,$$

så gäller det att $h(x) \to A$ då $x \to a$.

Observera att om $f(x) < g(x)$ i en punkterad omgivning av a behöver inte detta innebära att $A < B$, exempelvis om $f(x) = x^4$ och $g(x) = x^2$ och $x \to 0$, så är $A = B = 0$.

2.2 Kontinuerliga funktioner

I Kapitel 1 utnyttjade vi ofta för de elementära funktionerna egenskapen $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$, där $a \in D_f$. Denna egenskap tar vi som definition på kontinuitet i punkten a.

Definition 2.7. Om $a \in D_f$ och funktionen $f(x)$ har ett gränsvärde i punkten a så gäller

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) ,$$

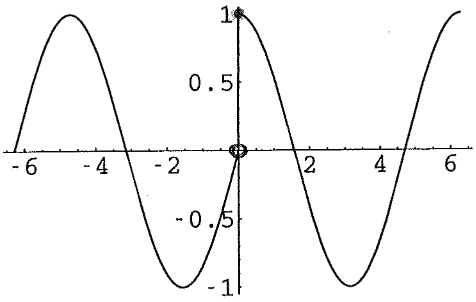
och vi säger att $f(x)$ är **kontinuerlig i punkten** a. Om $M \subseteq D_f$ och $f(x)$ är kontinuerlig i varje punkt i M, så säger vi att $f(x)$ är kontinuerlig i M. Om $M = D_f$ säger vi att $f(x)$ är **kontinuerlig**. En punkt som en funktion inte är kontinuerlig i kallas en **diskontinuitetspunkt** eller en **singularitet**.

Exempel 2.15. För funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x , & \text{om } x \geq 0 , \\ \sin x , & \text{Om } x < 0. \end{cases}$$

gäller att

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0) \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \text{ saknas (varför?)} .$$



Funktionen saknar tydligen gränsvärde då $x \to 0$.

Existensen av ett gränsvärde i en punkt a kan kontrolleras med hjälp av vänster- och högergränsvärden.

Sats 2.5. Om funktionen $f(x)$ har ett vänster- och högergränsvärde i punkten a så gäller

$$(\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = A) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A .$$

Om $a \in D_f$ så är $A = f(a)$ och $f(x)$ är kontinuerlig i punkten a.

Alla elementära funktioner är kontinuerliga i sina definitionsmängder. Vi motiverar detta enbart för polynom och rationella funktioner.

Exempel 2.16. $f(x) = x$ är kontinuerlig i varje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, ty

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \Rightarrow f(x) \to f(x_0) , \quad \text{då } x \to x_0 .$$

Räknelagarna för gränsvärden ger direkt att om f och g är kontinuerliga funktioner, så är också $f + g$, fg, f/g och $f \circ g$ kontinuerliga i sina definitionsmängder. Som en konsekvens av detta och att $f(x) = x$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ får vi att alla **polynom är kontinuerliga** i $\mathbb{R}$ och alla **rationella funktioner är kontinuerliga i sina definitionsmängder.** Vidare kan man visa att **alla elementära funktioner**, som behandlades i Kapitel 1, **är kontinuerliga i sina definitionsmängder**.

För funktioner kontinuerliga i en punkt a fås följande variant av Sats 2.3.

Sats 2.6. Om $g(x) \to a$ då $x \to x_0$, där $a \in \mathbb{R}$, och funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i a, så gäller

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(a)\,.$$

Exempel 2.17. Då $\tan x \to 0$ då $x \to 0$ och $\cos x$ är kontinuerlig i 0, gäller

$$\lim_{x \to 0} \cos(\tan x) = \cos(\lim_{x \to 0} \tan x) = \cos(0) = 1\,.$$

Vi undersöker gränsvärdet av två talföljder.

Exempel 2.18. Visa att för heltaligt n och $a > 0$ gäller

$$\lim_{n \to \infty} = \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Lösning: Då $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ och funktionen a^x är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$, samt $1/n \to 0$ då $n \to \infty$, gäller det att

$$\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = a^{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}} = a^0 = 1\,.$$

För det andra gränsvärdet gör vi omskrivningen $n^{1/n} = e^{\ln n^{1/n}}$ och får att

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = \lim_{n \to \infty} e^{\ln n^{1/n}} = e^{\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1\,.$$

Exempel 2.19. Visa att

$$\lim_{x \to 0+} x^x = 1\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

Vi avslutar detta avsnitt med att citera en sats som ger en uppräkning av egenskaper, (som är intuitivt accepterbara), för kontinuerliga funktioner på slutna intervall.

Sats 2.7. Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$, så gäller följande påståenden:

1. $f(x)$ är begränsad i intervallet,
2. $f(x)$ antar varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$,
3. $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde i intervallet.

Exempel 2.20. Antag att temperaturen i en cirkulär stålring med radien 1 varierar kontinuerligt. Visa att det finns minst 2 diametralt motsatta punkter på ringen med samma temperatur. (Se föreläsningsanteckningar.)

2.3 Monotona funktioner

Definition 2.8. Funktionen $f(x)$ är **uppåt begränsad (nedåt begränsad)** på mängden $M \subseteq D_f$ om det finns ett tal B (b) sådant att $f(x) \leq B$ ($f(x) \geq b$) för alla $x \in M$. Funktionen $f(x)$ är **begränsad** på M om $f(x)$ är både uppåt och nedåt begränsad på M.

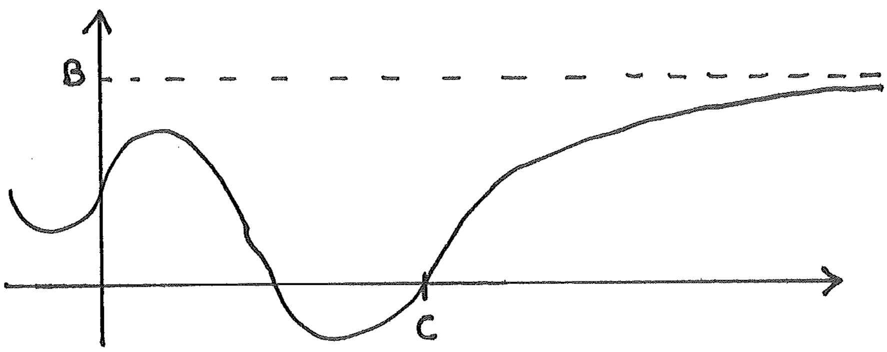
Exempel 2.21. Funktionen $f(x) = e^x$ är nedåt begränsad av $b = 0$ på $\mathbb{R}$, men inte uppåt begränsad.

$g(x) = 1/x$ är uppåt begränsad av $B = 0$ på $\mathbb{R}_-$, men inte nedåt begränsad.

$h(x) = \arctan x$ är begränsad på $\mathbb{R}$, $B = \pi/2$ och $b = -\pi/2$.

Sats 2.8. Om $f(x)$ är **växande** och **uppåt begränsad** på en mängd $M = \{x : x \geq c\}$, så existerar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Om $f(x)$ är **avtagande** och **nedåt begränsad** på en mängd $M = \{x : x \geq c\}$, så existerar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.



Följande exempel är **mycket viktigt**.

Exempel 2.22. Talet e. Betrakta talföljden

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Med hjälp av binomialsatsen kan vi skriva $f(n)$ i formen

$$f(n) = \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Ovanstående summa består av $n+1$ stycken termer $a_0, \dots, a_n$. Låt oss undersöka den k :te termen,

$$a_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!\, n^k}$$
$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}).$$

Vi gör följande observationer:

(1) Alla termer $a_k > 0$;

(2) När n växer, så ökar antalet termer a_k;

(3) För fixt k växer termen a_k med växande n.

Med stöd av $(1), (2)$ och (3) drar vi slutsatsen att $f(n)$ **är växande** då $n \to \infty$. Uppskattningen

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \le \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{då } k \ge 2,$$

ger att

$$a_k < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{då } k \ge 2.$$

Därmed erhålls att

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$
$$= 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)} < 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3.$$

Alltså gäller det att $f(n) < 3$ för alla n. Då är $f(n)$ **växande** och **uppåt begränsad**, så med stöd av Sats 2.8 existerar gränsvärdet

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Definition 2.9. Gränsvärdet

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ (\approx 2.71828) \tag{2.5}$$

kallas för den **naturliga logaritmens bas**.

Exempel 2.23. Visa att för $a \in \mathbb{Z}_+$ erhålls gränsvärdet

$$\lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{1}{an}\Big)^n = e^{1/a}.$$

Lösning: (Se föreläsningsanteckningar).

Vi betraktar nu funktionen

$$f(x) = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x, \quad x > 0,$$

som alltså är definierad för alla positiva reella tal x. Har denna funktion ett gränsvärde då $x \to +\infty$? För att undersöka detta låter vi $n = [x]$, dvs. heltalsdelen av x, som uppfyller $x - 1 < n \leq x$. För $x \geq 1$ erhålls uppskattningarna

$$(a)\ \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big),$$
$$(b)\ \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \geq \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^n = \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{-1}.$$

Högerleden i (a) och (b) går mot talet e då $x \to +\infty$. Då ger instängningsregeln i Sats 2.4 att $f(x) \to e$ då $x \to +\infty$, och vi har visat det första **standardgränsvärdet** i följande sats.

Sats 2.9. Det gäller att

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e, \tag{2.6}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e, \tag{2.7}$$

$$\lim_{x \to 0} \Big(1 + x\Big)^{1/x} = e. \tag{2.8}$$

Bevis: 1) För att bevisa formel (2.7) tillämpar vi sammansättningsregeln genom att införa variabeln $t = -x$ och utnyttjar gränsvärdet (2.6). Det gäller att $t \to +\infty$ om $x \to -\infty$ och vi får att

$$\begin{aligned}
\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x &= \Big(1 + \frac{1}{-t}\Big)^{-t} = \Big(\frac{1-t}{-t}\Big)^{-t} = \Big(\frac{t-1}{t}\Big)^{-t} \\
&= \Big(\frac{t}{t-1}\Big)^t = \Big(\frac{t-1+1}{t-1}\Big)^t = \Big(1 + \frac{1}{t-1}\Big)^t \\
&= \Big(1 + \frac{1}{t-1}\Big)^{t-1} \Big(1 + \frac{1}{t-1}\Big) \to e \cdot 1 = e, \text{ då } x \to -\infty.
\end{aligned}$$

2) För att bevisa formel (2.8) sätter vi $t = 1/x$. Om nu $x \to 0^+$ så gäller det att $t \to +\infty$ och vi får med stöd av (2.6) att

$$\left(1+x\right)^{1/x} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to e\,, \text{då } x \to 0^+\,.$$

Om $x \to 0^-$ så gäller det att $t \to -\infty$ och nu ger (2.7) att

$$\left(1+x\right)^{1/x} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \to e\,, \text{då } x \to 0^-\,.$$

Därmed är formel (2.8) bevisad. □

Exempel 2.24. För $x \neq 0$ gäller att

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = e^x\,,$$

ty då $t \to \pm\infty$ gäller det att $t/x \to \pm\infty$ och då potensfunktionen $(\cdot)^x$ är kontinuerlig i punkten e, erhålls

$$\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = \left(1+\frac{1}{t/x}\right)^{\frac{t}{x}\cdot x} = \left(\left(1+\frac{1}{t/x}\right)^{t/x}\right)^x \to e^x \text{ då } t \to \pm\infty\,.$$

Vi presenterar ännu två **standardgränsvärden**:

Sats 2.10. Det gäller att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,, \tag{2.9}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\,. \tag{2.10}$$

Bevis: 1) Eftersom naturliga logaritmen är kontinuerlig i punkten e erhålls, med stöd av (2.8), att

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln((1+x)^{1/x}) \to \ln e = 1\,,\ \text{då } x \to 0\,.$$

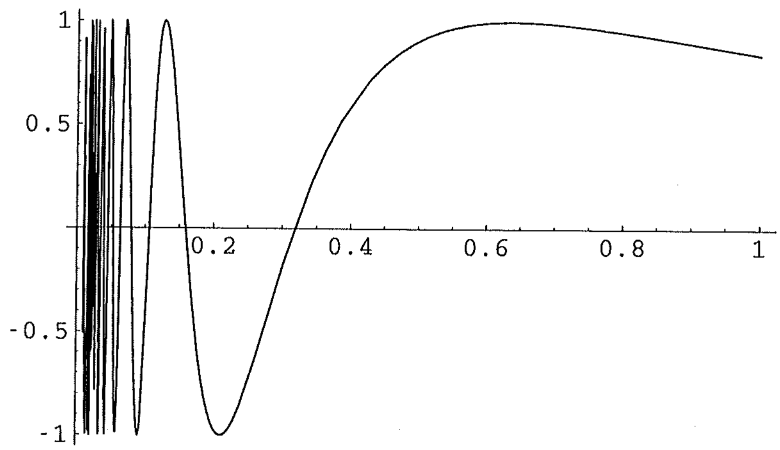
2) Vi sätter $x = \ln(1+y) \Leftrightarrow y = e^x - 1$. Då gäller det att $y \to 0$ då $x \to 0$, och vi får

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} \to \frac{1}{1} = 1\,,\ \text{då } x \to 0\,. \quad \square$$

Sats 2.11. Om funktionen $f(x)$ är **begränsad** och **monoton** i en högeromgivning $]a, a+\delta[$ av punkten a, så existerar gränsvärdet $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
Om funktionen $f(x)$ är **begränsad** och **monoton** i en vänsteromgivning $]a-\delta, a[$ av punkten a, så existerar gränsvärdet $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Exempel 2.25. Funktionen $f(x) = 1/x$ är monoton men inte begränsad i någon högeromgivning av 0, $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$.
$g(x) = \sin\frac{1}{x}$ är begränsad men ej monoton i varje högeromgivning av 0.

```
In[4]:= Plot[Sin[1/x], {x, 0.01, 1}, PlotRange -> All]
```



2.4 Standardgränsvärden

Vi gör en tabellering av de standardgränsvärden som man **bör memorera**.

$$\frac{x^k}{a^x} \to 0\,, \text{ då } x \to +\infty\,, \quad (a > 1)\,, \tag{2.11}$$

$$\frac{{}^a\log x}{x^k} \to 0\,, \text{ då } x \to +\infty\,, \quad (a > 1)\,, \tag{2.12}$$

$$x^\alpha\, {}^a\log x \to 0\,, \text{ då } x \to 0^+\,, \quad (a > 1,\ \alpha > 0)\,, \tag{2.13}$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1\,, \text{ då } x \to 0\,, \tag{2.14}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e\,, \text{ då } x \to \pm\infty\,, \tag{2.15}$$

$$\left(1 + \frac{t}{x}\right)^x \to e^t\,, \text{ då } x \to \pm\infty\,, \tag{2.16}$$

$$\left(1 + x\right)^{1/x} \to e\,, \text{ då } x \to 0\,, \tag{2.17}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e\,, \text{ då } n \to \infty\,, \tag{2.18}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1\,, \text{ då } x \to 0\,, \tag{2.19}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1\,, \text{ då } x \to 0\,, \tag{2.20}$$

$$\sqrt[n]{a} \to 1\,, \text{ då } n \to \infty\,, \quad (a > 0)\,, \tag{2.21}$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1\,, \text{ då } n \to \infty\,, \tag{2.22}$$

2.5 Tillämpning av gränsvärden på serier

Vi ger några exempel på tillämpning av gränsvärden på serier.

Betrakta en talföljd $(a_k)_{k=0}^{\infty}$. Då kan vi definiera en ny talföljd $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ genom

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

På detta sätt konstruerar vi en **serie**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

där talen a_k är seriens **termer** och talen s_k dess **partialsummor**.

Om partialsummorna har ett gränsvärde, $\lim_{k\to\infty} s_k = S$, så är serien **konvergent** med summan S, i annat fall är serien **divergent**.

Betrakta en **geometrisk serie** där $a \neq 0$,

$$a + ax + ax^2 + \ldots .$$

Dess partialsummor är geometriska summor,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} ax^k = a\,\frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad \text{om } x \neq 1, \\ s_n &= a(n+1), \quad \text{om } x = 1. \end{aligned}$$

Då ser vi direkt att den geometriska serien är konvergent om och endast om $|x| < 1$ och dess summa S ges då av

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = \frac{a}{1-x}, \quad |x| < 1 .$$

En annan typ av konvergenta serier som man kan beräkna summan av är serier med teleskoperande partialsummor. Vi ger ett exempel på en dylik.

Exempel 2.26. Serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

är konvergent, ty en omformning av termerna ger att

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

så det allmänna uttrycket för partialsummorna blir

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Vi ser då att $s_n \to 1$ då $n \to \infty$ och den givna serien är konvergent med summan $S = 1$.

Om en serie har positiva termer så bildar följden av partialsummor en växande talföljd. Om man kan visa att denna följd är uppåt begränsad så ger Sats 2.8 att partialsummorna har ett gränsvärde och serien är konvergent.

Vi återkommer till teorin för serier i andra delen av kursen.