Grundkurs i analys, v.48

Ibland krävs det att vi utför partiell integration två (eller flera) gånger.

Exempel 4.7. Beräkna

$$(a) \quad \int x^2 \cos x \, dx \,, \qquad (b) \quad \int e^x \sin x \, dx \,.$$

Primitiva funktioner

(a) $\underline{\int x^2 \cos x \, dx}$

$$= \int \underset{f}{\cos x} \cdot \underset{g}{x^2} \, dx \overset{\text{P.I.}}{=} \underset{F}{\sin x} \cdot \underset{g}{x^2} - \int \underset{F}{\sin x} \cdot \underset{g'}{(2x)} \, dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} x^2 \cdot \sin x - \left[(-\cos x) \cdot 2x - \int (-\cos x) \cdot 2 \, dx \right]$$

$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx$$

$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$= \underline{(x^2 - 2) \sin x + 2x \cdot \cos x + C}.$$

(b) $I = \int e^x \cdot \sin x \, dx$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx \right)$$

$$= e^x \cdot (\sin x - \cos x) - \underbrace{\int e^x \cdot \sin x \, dx}_{= I}$$

Alltså: $2 \cdot I = e^x (\sin x - \cos x) + 2C$

Svar: $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$,

Primitiva funktioner

Alternativ lösning: $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\ \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \end{cases}$ (Eulers formler)

$$\underline{\int e^x \cdot \sin x \, dx} = \frac{1}{2i} \int e^x \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\int e^{(1+i)x}\, dx - \int e^{(1-i)x}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1-i)x}}{1-i}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2i} e^x \left(\frac{1-i}{2} e^{ix} - \frac{1+i}{2} e^{-ix}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2i} e^x \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) - \frac{i}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right) + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right) + C}$$

4.3 Variabelsubstitution

Antag att $F'(x) = f(x)$ och att $g(x)$ är deriverbar. Med stöd av formel (4.16) gäller

$\{F(x)+C\}$

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(g(t)) + C = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)}, \qquad (*)$$

där sista ledet betecknar substitution av x med $g(t)$. Antag att $g(t)$ är strängt monoton. Då har $g(t)$ en invers,

$$x = g(t) \Leftrightarrow t = g^{-1}(x),$$

och om vi i de yttre leden i $(*)$ sätter $t = g^{-1}(x)$ får vi

$$\left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)} = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(g^{-1}(x))(=x)}$$

Vi får **formeln för variabelsubstitution**,

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}. \tag{4.19}$$

Den praktiska tolkningen är följande:

1. För att beräkna $\int f(x)\,dx$ gör vi substitutionen $x = g(t)$, varvid $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, så vi byter dx mot $g'(t)\,dt$.
2. Sedan beräknar vi $\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$.
3. I resultatet substituerar vi slutligen $t = g^{-1}(x)$ för att få en primitiv i variabeln x.

Ibland är det enklare att göra en substitution av formen $h(x) = t$ och byta $h'(x)\,dx$ mot dt. Vi illustrerar båda metoderna i följande exempel.

Exempel 4.8. Bestäm primitiva funktionerna till funktionen $\frac{e^{2x}}{e^x+1}$.

Lösning: 1) Vi gör substitutionen $x = \ln t$:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \left[x = \ln t = g(t),\ dx = g'(t)\,dt = \frac{1}{t}\,dt,\ t = g^{-1}(x) = e^x\right]$$

$$= \int \frac{(e^{\ln t})^2}{e^{\ln t}+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int \frac{t}{t+1}\,dt$$

$$= \int \frac{(t+1)-1}{t+1}\,dt = \int 1\cdot dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln|e^x+1| + C$$

$$= e^x - \ln(e^x+1) + C\,.$$

2) Kortare beräkningar fås med (den kanske naturligare) substitutionen $e^x = t$:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}\cdot e^x\,dx$$
$$= [h(x) = e^x = t,\ h'(x)\,dx = e^x\,dx = dt]$$
$$= \int \frac{t}{t+1}\,dt\,.$$

Fortsatta lösningen sammanfaller med punkt 1).

$$[h(x) = e^x + 1 = t,\ h'(x)\,dx = e^x\,dx = dt]$$
$$= \int \frac{t-1}{t}\,dt = \int \left(1-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$= t - \ln|t| + C_1 = e^x + 1 - \ln(e^x+1) + C_1$$
$$= e^x - \ln(e^x+1) + C$$

Exempel 4.9. Beräkna

$$\int \arctan(\sqrt{x-1})\,dx\,, \quad x > 1\,,$$

med hjälp av substitutionen $\sqrt{x-1} = t$.

<u>Lösning:</u> $\underline{\int \arctan(\sqrt{x-1})\,dx} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x-1},\ t^2 = x-1 \\ x = t^2+1,\ dx = 2t\cdot dt \end{array}\right]$

$$= \int \arctan t \cdot 2t\,dt = \int 2t \cdot \arctan t\,dt$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} t^2 \cdot \arctan t - \int t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \left(\int 1 \cdot dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right)$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - t + \arctan t + C$$

$$= (t^2+1)\arctan t - t + C$$

$$= \underline{x \cdot \arctan(\sqrt{x-1}) - \sqrt{x-1} + C}.$$

Ex (Alt. lösning av Ex. 4.9): (15.3,5)

$$\underline{\int \arctan(\sqrt{x-1})\,dx} = \int 1 \cdot \arctan(\sqrt{x-1})\,dx$$

$$= x \cdot \arctan(\sqrt{x-1}) - \int x \cdot \frac{1}{1+x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{-1/2}$$

$$= x \cdot \arctan(\sqrt{x-1}) - \int \frac{1/2}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$D\left(\sqrt{x-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \underline{x \cdot \arctan(\sqrt{x-1}) - \sqrt{x-1} + C}$$

Exempel 4.10. Beräkna (viktigt!)

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\,.$$

Lösning: Vi utför kvadratkomplettering i nämnaren för att kunna utföra en lämplig substitution,

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+1$

$$= [x+1/2=\sqrt{3/4}\,t\,,\ dx=\sqrt{3/4}\,dt]$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\,dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

4.4 Integration av rationella funktioner

För att bestämma primitiva funktionen

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx\,,$$

där p, q är polynom av gradtal m respektive n har vi ett systematiskt tillvägagångssätt:

1. Om $m \geq n$ utför vi **division** och erhåller

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

där $h(x)$ är ett polynom av gradtal $m - n$ och gradtalet av $r(x)$ är strängt mindre än gradtalet av $q(x)$. Då gäller

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int h(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx,$$

där den första integralen i högra ledet är enkel att beräkna.

2. För att **beräkna integralen**

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx\,, \qquad \operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} q(x)\,,$$

faktoriserar vi $q(x)$ i reella första- och andragradsfaktorer, vilket i teorin är möjligt om $q(x)$ har reella koefficienter, (även i praktiken i alla fall då gradtalet för $q(x)$ inte överstiger fyra).

Mot **reell rot** $x = a$ till ekvationen $q(x) = 0$ svarar faktorn

$$(x - a)\,.$$

Komplexa rötter till $q(x) = 0$ uppträder som konjugerade par. Om $x = \alpha + i\beta$ är en rot till ekvationen, så är även $x = \alpha - i\beta$ en rot. Vi får då andragradsfaktorn

$$(x - (\alpha + i\beta))\,(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta = x^2 + ax + b\,.$$

3. **Partialbråksuppdelning** av $\frac{r(x)}{q(x)}$ innebär uppdelning i en summa av delbråk.

a) Mot varje **enkel** förstagradsfaktor $(x-a)$ i $q(x)$ svarar en term av formen

$$\frac{A}{x-a}, \quad A \text{ konstant}.$$

b) Mot varje **multipel** förstagradsfaktor $(x-a)^n$ ~~$a)^n$~~, $n \geq 2$, i $q(x)$ svarar termerna

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad A_1, \ldots, A_n \text{ ~~kö~~ konstanter}$$

c) Mot en **enkel** andragradsfaktor $(x^2 + ax + b)$ ~~$ax + b)$~~ i $q(x)$ svarar termen

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}, \qquad A, B \text{ konstanter}.$$

Primitiva funktioner

4. **Bestäm konstanterna** i partialbråksuppdelningen av $\frac{r(x)}{q(x)}$.

5. **Integrera** partialbråksuppdelningen av $\frac{r(x)}{q(x)}$.

Integration av termerna i partialbråksuppdelningen

I fallet 3 a) erhålls

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C\,,$$

och i fallet 3 b) har vi för $n \geq 2$,

$$\int \frac{A_n}{(x-a)^n}\,dx = A_n \int (x-a)^{-n}\,dx = A_n \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

Fallet 3 c) är mera komplicerat.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx\,.$$

Vi undersöker den andra integralen genom att först kvadratkomplettera nämnaren,

$$x^2 + px + q = x^2 + px + (p/2)^2 - (p/2)^2 + q$$
$$= (x + p/2)^2 + a\,, \qquad a = q - (p/2)^2\,.$$

Då $x^2 + px + q = 0$ saknar reella rötter gäller $p^2 - 4q < 0 \Leftrightarrow q - p^2/4 > 0 \Leftrightarrow a > 0$.

Substituerar $x + p/2 = \sqrt{a}\,t$, $dx = \sqrt{a}\,dt$:

Primitiva funktioner

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x+p/2)^2+a}\,dx = \int \frac{\sqrt{a}\,dt}{at^2+a}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}\cancel{dt} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan t + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{a}}\right) + C\,.$$

Primitiva funktioner

Alltså får vi

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{a}}\right) + C\,,$$

där $a = q - (p/2)^2$.

Obs! Memorera ej denna formel utan lär er tillvägagångssättet.

Bestämning av konstanterna i partialbråksuppdelningen

Demonstrerar förfarandet med två exempel.

Exempel 4.11. Partialbråksuppdela funktionen

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}.$$

Lösning: Vi gör ansatsen

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{(A+B+C)\,x^2 + (A+2B-3C)\,x - 6A - 3B + 2C}{(x-1)(x-2)(x+3)}.$$

Ur detta samband erhålls, då vi identifierar koefficienterna för täljarpolynomen, ekvationssystemet

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-3C=1 \\ -6A-3B+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=3/5 \\ C=-1/10\,. \end{cases}$$

Alternativ lösningsmetod: Multiplicera båda leden i ansatsen med $(x-1)$:

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+3)} \equiv A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x+\underset{3}{\cancel{2}}}.$$

Sätt sedan $x=1$:

$$\frac{1+1}{(1-2)(1+3)} = A \quad \Leftrightarrow \quad A = -1/2.$$

Multiplikation av ansatsen med $(x-2)$ och insättning av $x=2$ respektive multiplikation med $(x+3)$ och insättning av $x=-3$ ger:

$$B = \frac{2+1}{(2-1)(2+3)} = 3/5,$$

$$C = \frac{-3+1}{(-3-1)(-3-2)} = -1/10.$$

Således erhåller vi då att

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{10}\ln|x+3| + K.$$

Exempel 4.12. Beräkna

$$\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x}\,dx\,.$$

Lösning: Nämnaren kan faktoriseras i formen $x(x^2+x+1)$ där (x^2+x+1) är en enkel andragradsfaktor, ty

$$x^2+x+1 = (x-(-1/2+i\sqrt{3}/2))(x-(-1/2-i\sqrt{3}))$$

Då gör vi ansatsen

$$\frac{x+3}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

Multiplicera nu båda leden i ansatsen med x och sätt sedan $x = 0$. Då kan vi bestämma konstanten A,

$$A = \frac{0+3}{0^2+0+1} = 3\,.$$

Med konstanten A bestämd gör vi ansatsens högerled liknämnigt

$$\frac{x+3}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{(B+3)x^2+(C+3)x+3}{x(x^2+x+1)}\,.$$

Då ser vi genast att

$$B = -3 \quad \text{och} \quad C = -2$$

måste gälla. Partialbråksuppdelningen är utförd och vi kan integrera

$$\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 3\ln|x| - \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

Men den sista integralen har vi beräknat i Exempel 4.10, så vi får att

$$\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x}\,dx = 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K\,.$$

4.5 Integration av trigonometriska uttryck

Vi har tidigare, i några exempel, visat att man för vissa trigonometriska integrander kan använda omskrivning med hjälp av trigonometriska formler eller med hjälp av Eulers formler. I detta avsnitt skall vi presentera lämpliga tekniker för variabelsubstitution i trigonometriska uttryck.

Rationella uttryck i $\sin x$ och $\cos x$, exempelvis

$$\int \frac{\sin x \cos x - 3\sin^2 x}{2\cos x \sin x + \cos x}\, dx\,,$$

kan alltid överföras på beräkning av primitiver till rationella funktioner med hjälp av substitutionen

$$\begin{cases} \tan \dfrac{x}{2} = t\,, \quad -\pi < x < \pi\,, \\ x = 2\arctan t\,, \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt\,, \end{cases}$$

varvid vi erhåller, med stöd av formlerna $\sin 2x =$

Sin $2x$ = $2\sin x\cos x$ och $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, att

$(\tan\frac{x}{2} = t)$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1}$$

$$= \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exempel 4.13. Beräkna

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad (b)\ \int \frac{dx}{\cos x}.$$

(a) $$\underline{\int \frac{dx}{\sin x}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + C$$

$$\underline{= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C},$$

Primitiva funktioner

(b)
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{\overset{2\,=\,(1-t)+(1+t)}{2}}{(1+t)(1-t)}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt$$

$$= \ln|1+t| - \ln|1-t| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C.$$

alt.
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x,\ x = \frac{\pi}{2} - t \\ dx = -dt \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-dt}{\sin t} \overset{(a)}{=} -\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Några specialfall

Lämpliga substitutioner för formerna

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x \, dx \,, \qquad \int f(\cos x) \cdot \sin x \, dx$$

$$\begin{cases} \sin x = t \\ dt = \cos x \, dx \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} \cos x = t \\ dt = -\sin x \, dx \end{cases}$$

Exempel 4.14. Beräkna

$$(a) \int \frac{\sin x \, dx}{(1 + \cos x)^2} \,, \qquad (b) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx \,.$$

(a)
$$\underline{\int \frac{\sin x \, dx}{(1+\cos x)^2}} = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x \, dx \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{-dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{1+t} + C$$
$$= \underline{\frac{1}{1+\cos x} + C}.$$

(b)
$$\underline{\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cdot \cos x\,dx$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x}\cdot \cos x\,dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{1-t^2}{t^4}\cdot dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= -\frac{t^{-3}}{3} + t^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C$$

$$= \underline{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C}.$$

Primitiva funktioner

För integraler av formen

$$\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx\,, \quad \int f(\tan x)\, dx\,, \quad \int f(\tan x)\, \frac{dx}{\cos^2 x}$$

kan man prova substitutionen

$$\begin{cases} \tan x = t\,, \quad x = \arctan t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\,, \quad dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}\,. \end{cases}$$

Exempel 4.15. Beräkna

$$(a) \int \tan^3 x\, dx\,, \qquad (b) \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\,.$$

(a)

$$\underline{\int \tan^3 x \cdot dx} = \left[\begin{array}{l} \tan x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}, \; x = \arctan t \right]$$

$$= \int t^3 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{(t^3+t)-t}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int t\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x) + C = \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) + C$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + C = \underline{\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C}.$$

(b) $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\left(a^2 + b^2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \tan x = t, \quad x = \arctan t \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \left[\begin{array}{l} bt = au \\ dt = \frac{a}{b}\cdot du \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{a}{b}\,du}{a^2 + b^2\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot u^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan u + C = \frac{1}{ab}\cdot\arctan\left(\frac{b}{a}t\right) + C$$

$$= \frac{1}{a\cdot b}\cdot\arctan\left(\frac{b}{a}\cdot\tan x\right) + C.$$

Primitiva funktioner

4.6 Integraler innehållande rotuttryck

Vi behandlar olika typer av rotuttryck som kan förekomma vid bestämning av primitiva funktioner och anger substitutioner som kan användas för att förenkla problemet.

Formen $\sqrt{a^2 - x^2}$

Här kan man prova med substitutionen

$$x = a\sin t\,, \quad |t| \leq \pi/2\,, \qquad t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\,, \qquad dx = a\cos t\,dt\,.$$

(Alternativt kan man prova med substitutionen $x = a\cos t$).

Exempel 4.16. Beräkna

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,.$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{ll} x = a\sin t, & |t| \le \frac{\pi}{2} \\ dx = a\cos t \cdot dt & \\ t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) & \end{array}\right]$$

$$= \int \underbrace{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}}_{\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = |a|\cos t \overset{(a>0)}{=} a\cos t} \cdot a\cos t \cdot dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt$$

$$\left[(1{,}47)\ \cos^2 t = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\right]$$

$$= a^2 \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$\left[(1{,}45)\ \sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \sin t \cdot \underbrace{\cos t}_{\sqrt{1-\sin^2 t}}\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Formen $\sqrt{a^2+x^2}$

Prova med substitutionen $\sqrt{a^2+x^2} = x - t$.
Då får vi (kolla!):

$$x = \frac{t^2 - a^2}{2t}, \quad x - t = -\frac{t^2 + a^2}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2}\, dt\,.$$

Primitiva funktioner

Formen $\sqrt{a^2+x^2}$.

Sätt: $\sqrt{a^2+x^2} = x-t \iff a^2+\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 2xt + t^2$

$\iff x = \dfrac{t^2-a^2}{2t}$

$$x-t = \frac{t^2-a^2}{2t} - t = -\frac{t^2+a^2}{2t}.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t\cdot 2t - 2\cdot(t^2-a^2)}{4t^2} = \frac{2t^2+2a^2}{4t^2} = \frac{t^2+a^2}{2t^2}$$

$$dx = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\cdot dt$$

Exempel 4.17. Bestäm

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

Primitiva funktioner

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = x - t \\ x = \dfrac{t^2-1}{2t}, \quad x - t = -\dfrac{t^2+1}{2t}, \\ dx = \dfrac{t^2+1}{2t^2}\,dt \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\cdot dt}{-\frac{(t^2+1)}{2t}} = -\int \frac{(t^2-1)^2\cancel{(t^2+1)}\cdot \cancel{2t}}{(2t)^2\cancel{2}t^2\cancel{(t^2+1)}}\,dt$$

$$= -\int \frac{(t^2-1)^2}{4t^3}\,dt = -\int \frac{t^4-2t^2+1}{4t^3}\,dt$$

$$= -\int\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^3}\right)dt = -\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}\cdot t^{-2} + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(4\ln|t| + \frac{1}{t^2} - t^2\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(4\ln\left|x-\sqrt{1+x^2}\right| + \frac{1}{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2} - \left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(4\cdot\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) + \frac{1-\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^4}{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right) + C.$$

Primitiva funktioner

Exempel (4.14).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\cdot dt}{-\frac{t^2+a^2}{2t}} = -\int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= -\ln|t| + C_1 = -\ln\left|x-\sqrt{a^2+x^2}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{a^2+x^2}}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{x^2-a^2-x^2}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{1}{a^2}\cdot\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{1}{a^2}\right| + \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$

(jfr. (4.14))

Formerna $\sqrt{ax+b}$ och $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

I dessa fall kan man prova med substitutionerna

$$\sqrt{ax+b} = t \quad \text{respektive} \quad \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t\,.$$

Exempel 4.18. Beräkna

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}\,.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+1} = t, & x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1, & dx = 2t\,dt \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)t} = \int \frac{2}{\underbrace{t^2-1}_{=(t+1)(t-1)}} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \ln\left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C.$$

Formen $\sqrt{ax^2+bx+c}$, där $a>0$

Här kan vi göra substitutionen

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x - t\,.$$

Exempel 4.19. Beräkna

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{\frac{t^2+4t+5}{2(t+2)^2}\,dt}{-\frac{t^2+4t+5}{2(t+2)}}$$

$$= -\int \frac{dt}{t+2} = -\ln|t+2| + C$$

$$= -\ln\left|2 + x - \sqrt{x^2+4x+5}\right| + C$$

$$\left[\begin{aligned} \sqrt{x^2+4x+5} &= x - t \\ x^2+4x+5 &= x^2 - 2xt + t^2 \\ x &= \frac{t^2-5}{2t+4} \\ dx &= \frac{t^2+4t+5}{2(t+2)^2}\cdot dt \\ x - t &= -\frac{(t^2+4t+5)}{2(t+2)} \end{aligned}\right.$$

Formen $\sqrt{ax^2+bx+c}$, där $a<0$ och polynomet har reella nollställ

I detta fall gör vi först omskrivningen

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{r^2-(x\pm\alpha)^2}\,.$$

Därefter gör vi substitutionen

$$(x\pm\alpha) = r\cdot\sin t\,,\qquad |t|<\frac{\pi}{2}\,.$$

Exempel 4.20. Bestäm

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}} \overset{*)}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}} = \left[\begin{array}{l} (x+\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\cdot \sin t \\ x = \frac{5}{2}\cdot \sin t - \frac{1}{2} \\ dx = \frac{5}{2}\cos t \, dt \\ t = \arcsin\left(\frac{2}{5}(x+\frac{1}{2})\right) \\ |t| < \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\frac{5}{2}\cos t \, dt}{\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\sin^2 t}} = \int \frac{\frac{5}{2}\cos t}{\frac{5}{2}\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t}}$$

$$= \int 1 \cdot dt = t + C$$

$$= \arcsin\left(\frac{2x+1}{5}\right) + C.$$

$$*)\quad (6-x-x^2) = -(x^2+x-6) = -\left(x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{24}{4}\right) = -\left((x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{25}{4}\right)$$
$$= \frac{25}{4}-(x+\tfrac{1}{2})^2$$

Formerna $\sqrt{1+x^2}$, $(1+x^2)$ eller $(1+x^2)^n$ *)

I dessa fall kan man försöka med substitutionen

$$\begin{cases} x = \tan t\,, \ |t| < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} = (1+\tan^2 t)\,dt\,. \end{cases}$$

*) $\sqrt{a^2+x^2}$, (a^2+x^2) eller $(a^2+x^2)^n$

$$\begin{cases} x = a\tan t\,, \ |t| < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}\,dt = a(1+\tan^2 t)\,dt \end{cases}$$

Exempel 4.21. Beräkna

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \begin{bmatrix} x = \tan t, |t|<\frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t}\, dt \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}\, dt}{\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} = \int \cos t \cdot dt$$

$$= \sin t + C = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \cos t + C$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} + C$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Givetvis kan ibland andra substitutioner än de rekommenderade fungera bra. Det avslutande exemplet löser vi behändigt med substitutionen $1/x = t$.

Exempel 4.22. Bestäm

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^3}\, dx, \qquad x > 1\,.$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x}}{x^3}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1/x\,; & x = 1/t\,, & x>1 \\ dx = -\frac{1}{t^2}\,dt & & 0<t<1 \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}}}{\frac{1}{t^3}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int -t\sqrt{\frac{1-t}{t^2}}\,dt = \int -\sqrt{1-t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(1-t)^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{(x-1)}{x}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x}}{x^2} + C\,.$$

Kan F(x) uttryckas med hjälp av elementära funktioner?

Robert Risch gav 1969 en algoritm för att bedömma detta "The problem of integration in Finite Terms" (Trans. Am. Math. Soc.)

Primitiva funktioner

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int e^{x^2}\,dx = ?$$

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{x}{\ln x}\,dx,$$

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx, \quad \int \sin(x^2)\,dx, \ldots$$