Grundkurs i analys, v.47

Exempel 3.2. Funktionerna $f(x) = K$ ($=$ konstant) och $g(x) = x$ är deriverbara för alla $x \in \mathbb{R}$ med derivatorna

$$f'(x) = 0 \quad \text{och} \quad g'(x) = 1\,. \tag{3.1}$$

Lösning: Tag $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{K - K}{x - x_0} = 0$, för alla $x \neq x_0$.

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0 = f'(x_0)$, $\therefore f'(x) = 0$

2) $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$, för alla $x \neq x_0$.

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1 = g'(x_0)$. $\therefore g'(x) = 1$

Exempel 3.3. Betrakta potensfunktionen $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller

$$f'(x) = n\,x^{n-1}, \qquad (3.2)$$

ty vi har för fixt $x_0 \in \mathbb{R}$ och med stöd av binomialsatsen att

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \frac{(x_0+(x-x_0))^n - x_0^n}{x-x_0}$$

$$= \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}(x-x_0) + \ldots + \binom{n}{n}x_0^0(x-x_0)^n - x_0^n}{(x-x_0)}$$

$$= \binom{n}{1}x_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}(x-x_0) + \ldots$$

$$+ \binom{n}{n}x_0^0(x-x_0)^{n-1}$$

$$\longrightarrow \binom{n}{1}x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}, \quad \text{då } x \to x_0 .$$

Exempel 3.4. Är funktionen $f(x) = |x|$ deriverbar i $x = 0$?

Lösning: Vi bildar differenskvoten:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{då } x > 0; \\ -1, & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Vi drar slutsatsen att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ inte existerar, $f(x)$ är inte deriverbar i $x = 0$. Detta visar att kontinuitet i en punkt inte garanterar deriverbarhet i punkten. I detta fall har vi dock en **högerderivata** och en **vänsterderivata** i origo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1\,.$$

Sats 3.1. Om funktionen $f(x)$ är deriverbar i punkten x_0, så är $f(x)$ kontinuerlig i punkten.

Bevis: Vi har att (för alla $x \neq x_0$)

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

då $x \to x_0$,

så $f(x) \to f(x_0)$ då $x \to x_0$. □

(dvs. $f(x)$ kont. i x_0)

Vi har följande räkneregler för derivering:

Sats 3.2. Antag att funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara i punkten x_0. Då gäller det att

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,, \tag{3.3}$$

$$(Kf)'(x_0) = K\,f'(x_0)\,, \quad K \text{ är en konstant}\,, \tag{3.4}$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,, \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,, \quad \text{om } g(x_0) \neq 0 \tag{3.6}$$

Exempel 3.5. Betrakta polynomet

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,.$$

Med stöd av formlerna (3.2) och (3.4) har vi att $D a_k x^k = a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Upprepad användning av formel (3.3) ger då derivatan av polynomet:

$$p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1 \quad (3,7)$$

(3.2) $D(x^n) = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

3.2 Trigonometriska funktioner

Vi fortsätter härledningen av deriveringsregler för de elementära funktionerna. Betrakta först funktionen $f(x) = \sin x$. Med stöd av formeln (1.52)

$$\sin x - \sin y = 2\,\sin\frac{x-y}{2}\,\cos\frac{x+y}{2}$$

bildar vi differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \frac{2\,\sin\frac{x+h-x}{2}\,\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}$$

1

$$= \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$\longrightarrow 1\cdot\cos x\,,\ \text{då } h \to 0\,.$$

Därmed gäller formeln

$$D \sin x = \cos x \,. \tag{3.9}$$

På ett analogt sätt härleds formeln

$$D \cos x = -\sin x \,. \tag{3.10}$$

Derivator

Betrakta funktionen $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Med stöd av Sats 3.2 och formlerna (3.9) och (3.10) erhålls

$$f'(x) = \frac{\overbrace{\cos x}^{D\sin x} \cos x - \sin x \overbrace{(-\sin x)}^{D\cos x}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

vilket ger deriveringsregeln

$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,. \tag{3.11}$$

På ett liknande sätt får vi att

$$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)\,. \tag{3.12}$$

3.3 Logaritmfunktioner

För att härleda derivatan av logaritmfunktionen

$$f(x) = {}^{a}\log x\,, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

utför vi först ett basbyte till den naturliga logaritmen

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}\,, \qquad \left(= \frac{{}^{e}\log x}{{}^{e}\log a} \right)$$

och studerar differenskvoten:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{\ln(x+h)}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln a}}{h} = \frac{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\ln a}$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}}{\ln a}$$

$$\left(\text{Sätt } \frac{h}{x} = \frac{1}{t}, \text{ så } t \to \pm\infty \text{ då } h \to 0^{\pm}.\right)$$

$\langle \Rightarrow$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t/x}}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{x\ln a}\cdot\ln e = \frac{1}{x\ln a}, \text{ då } t \to \pm\infty$$

Därmed erhålls formeln

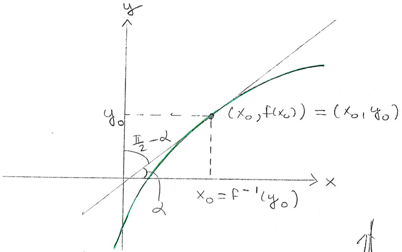
$$D\,{}^{a}\!\log x = \frac{1}{x \ln a}, \qquad x > 0\,. \tag{3.13}$$

Speciellt för $a = e$ gäller

$$D \ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0\,. \tag{3.14}$$

3.4 Derivata av invers

Innan vi bevisar satsen om derivata av inversa funktionen ger vi en geometrisk motivering:

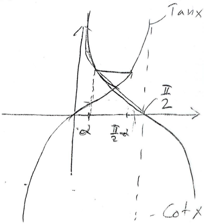


$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = (f^{-1})'(y_0)$$

$$\therefore\ (f^{-1})'(y_0) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$$

$$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Derivator

Sats 3.3. Antag att funktionen f har en invers funktion som är kontinuerlig. Om f är deriverbar i punkten $x = x_0$ och $f'(x_0) \neq 0$, så är f^{-1} deriverbar i punkten $y_0 = f(x_0)$ och

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad (y_0 = f(x_0)). \qquad (3.15)$$

Bevis: Vi har att $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Eftersom f^{-1} är kontinuerlig gäller $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ då $y \to y_0$. Alltså: $x \to x_0$ då $y \to y_0$. Vi studerar differenskvoten,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$
$$= \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ då } y \to y_0 .$$

(dvs. då $x \to x_0$)

Formel (3.15) kan, om vi byter y_0 mot x och x_0 mot y, skrivas som

$$(Df^{-1})(x) = \frac{1}{Df(y)}, \quad x = f(y), \qquad (3.16)$$

och mera kortfattat som $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ eller $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$\left(y = f^{-1}(x) \right)$

3.5 Exponential- och arcusfunktioner

Logaritmfunktionen

$$y = f(x) = {}^a\log x\,, \quad a > 0\,,$$

har exponentialfunktionen

$$x = f^{-1}(y) = a^y$$

som sin invers. En tillämpning av Sats 3.3 och formel (3.13) ger att $\left(y_0 = f(x_0)\,,\ x_0 = f^{-1}(y_0) = a^{y_0}\right)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0 \ln a}} = x_0 \ln a = a^{y_0} \ln a\,.$$

Därmed får vi formeln för derivering av exponentialfunktioner,

$$D\,a^x = a^x \ln a\,, \quad a > 0\,, \tag{3.18}$$

och speciellt för $a = e$,

$$D\,e^x = e^x\,. \tag{3.19}$$

Exempel 3.9 $f(x) = xe^x,\ x \geq 0$. Beräkna $(f^{-1})'(e)$

Lösning: Är f strängt monoton?

$x_1 > x_2 \geq 0 \Rightarrow e^{x_1} > e^{x_2} \Rightarrow x_1 e^{x_1} > x_2 e^{x_2}$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore$ f strängt växande.

Sats 3.3: $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, $y_0 = e$, $y_0 = f(x_0)$

$\boxed{x_0 = ?\ ,\ f'(x_0) = ?}$

$f'(x) = x \cdot De^x + (Dx) \cdot e^x = xe^x + 1 \cdot e^x = e^x(x+1)$

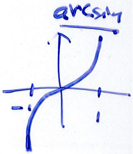
$f(x_0) = e \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} = e \Leftrightarrow x_0 = 1$ (Entydig lösning, ty f str. väx.)

$\therefore$ $f'(x_0) = f'(1) = e^1 \cdot (1+1) = 2e$

Svar: $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2e}$.

Funktionen

$$y = f(x) = \sin x\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,$$



har inversen

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y\,, \qquad -1 < y < 1\,.$$

En tillämpning av Sats 3.3 och formel (3.9) ger då att

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \qquad -1 < y < 1$$

så vi erhåller deriveringsregeln

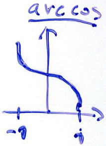
$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad |x| < 1\,. \qquad (3.20)$$

På analogt sätt behandlas funktionen

$$y = f(x) = \cos x\,, \quad 0 < x < \pi\,,$$

som har inversen

$$x = f^{-1}(y) = \arccos y\,, \quad -1 < y < 1\,,$$



och vi får att

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}},$$

$-1<y<1$

således gäller

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad |x| < 1\,. \quad (3.21)$$

Vidare för funktionen

$$y = f(x) = \tan x\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

har vi inversen

$$x = f^{-1}(y) = \arctan y\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,,$$

och därmed gäller det att

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\,, y \in \mathbb{R}\,,$$

så vi får deriveringsregeln

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \qquad (3.22)$$

För funktionen

$$y = f(x) = \cot x\,, \quad 0 < x < \pi\,,$$

ges inversen av

$$x = f^{-1}(y) = \operatorname{arccot} y\,,\ y \in \mathbb{R}\,,$$

och slutligen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-(1+\cot^2 x)} = \frac{1}{-(1+y^2)}\,, y \in \mathbb{R}\,,$$

vilket ger deriveringsregeln

$$D \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \qquad (3.23)$$

Sats 3.4. Kedjeregeln. Om funktionen g är deriverbar i punkten x och funktionen f är deriverbar i punkten $g(x)$ så är den sammansatta funktionen

$$u(x) = f(g(x))$$

deriverbar i punkten x med derivatan

$$u'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \,. \tag{3.24}$$

Bevis: Antag att $g(x+h) \neq g(x)$ för alla h i en punkterad omgivning av 0, $]-\lambda, 0[\cup]0, \lambda[$, för något $\lambda > 0$. Vi bildar differenskvoten i en sådan omgivning och beaktar att $g(x+h) \to g(x)$ då $h \to 0$, eftersom g är kontinuerlig i punkten x,

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\longrightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)\,, \text{ då } h \to 0\,. \qquad \square$$

Sätter vi $y = g(x)$ och $u = f(y)$ kan (3.24) skrivas i den korta formen

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\,. \tag{3.25}$$

Exempel 3.10. Funktionen $u(x) = (1+x^2)^n$ är sammansatt av $f(x) = x^n$ och $g(x) = 1 + x^2$, dvs. $u(x) = f(g(x))$, $f'(x) = nx^{n-1}$ och $g'(x) = 2x$. Då ger kedjeregeln att

$$u'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = n(1+x^2)^{n-1} \cdot 2x\,.$$

Exempel 3.11. Beräkna $D \ln(\sin(\cos x))$

Lösning: $\begin{cases} f(x) = \ln x & \text{yttre funktion} \\ g(x) = \sin(\cos x) & \text{inre funktion} \end{cases}$

$$\underline{D \ln(\sin(\cos x))} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{\sin(\cos x)} \cdot D(\sin(\cos x))$$

$$= \frac{1}{\sin(\cos x)} \cdot \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)$$

$$= -\sin x \cdot \frac{\cos(\cos x)}{\sin(\cos x)} = \underline{-\sin x \cdot \cot(\cos x)}.$$

3.7 Potensfunktioner

För potensfunktioner

$$u(x) = x^a , \quad x > 0 , \ a \in \mathbb{R} ,$$

gör vi omskrivningen

$$u(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x} = f(g(x)) ,$$

där $f(x) = e^x$ och $g(x) = a \ln x$. Då ger kedjeregeln att

$$u'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \underbrace{e^{a \ln x}}_{x^a} \frac{a}{x} = a\, x^{a-1} .$$

Vi har då deriveringsregeln för potensfunktioner

$$D\, x^a = a x^{a-1} , \quad x > 0 , \ a \in \mathbb{R}. \qquad (3.26)$$

Derivator

$$D \sinh x = \cosh x\,, \tag{3.27}$$

$$D \cosh x = \sinh x\,, \tag{3.28}$$

$$D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}\,, \tag{3.29}$$

$$D \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}\,, \qquad x \neq 0\,. \tag{3.30}$$

Exempel 3.13. Betrakta funktionen

$$f(x) = \ln|x|, \quad x \neq 0.$$

För $x > 0$ gäller

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

För $x < 0$ gäller

$$f(x) = \ln(-x), \quad f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Vi har alltså formeln

$$D \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \tag{3.31}$$

Exempel 3.14. Logaritmiska derivatan. Antag att $f(x)$ är en deriverbar funktion och definiera funktionen

$$F(x) = \ln|f(x)|.$$

Med hjälp av kedjeregeln och formel (3.31) får vi

$$F'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

vilket ger formeln för den logaritmiska derivatan av f.

$$D \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{3.32}$$

Exempel 3.15. Antag att g och h är deriverbara funktioner, med $g(x) > 0$, och definiera

$$f(x) = g(x)^{h(x)}.$$

Då kan vi göra omskrivningen

$$f(x) = e^{\ln g(x)^{h(x)}} = e^{h(x)\,\ln g(x)}$$

vilket gör det möjligt att bestämma derivatan av f,

$$f'(x) = e^{h(x)\,\ln g(x)}\,(h'(x)\,\ln g(x) + h(x)\,\frac{1}{g(x)}\,g'(x))$$

$$= g(x)^{h(x)}\,(h'(x)\ln g(x) + h(x)\,\frac{g'(x)}{g(x)}).$$

Exempel 3.76. Bestäm för $x > 0$ derivatan av funktionen $f(x) = x^x$.

Lösning: Gör omskrivningen

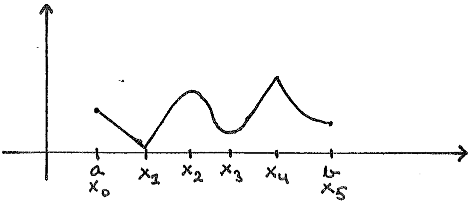
$$f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \underbrace{e^{x\ln x}}_{x^x} \cdot D(x \ln x) = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \underline{\underline{x^x(\ln x + 1)}}.$$

3.10 Lokala extrempunkter och medelvärdessatsen

Betrakta en kontinuerlig funktion $f : [a, b]\frown\mathbb{R}$.



Denna funktion har ett lokalt maximum i punkterna: x_0, x_2, x_4 och ett lokalt minimum i punkterna: x_1, x_2, x_5. Den har ett globalt maximum i punkten x_4 och ett globalt minimum i punkten x_1.

Definition 3.3. En funktion $f : \mathbb{R}\frown\mathbb{R}$ har ett **lokalt maximum** (**minimum**) i punkten x_0 om det finns ett tal $\delta > 0$ så att

$$(x \in D_f \text{ och } |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \;\; (f(x) \geq f(x_0)). \qquad (3.33)$$

Om $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ har vi ett **strängt lokalt maximum** (**strängt lokalt minimum**). Lokala maxima och minima kallas **extremvärden** och lokala maximi- och minimipunkter kallas lokala **extrempunkter**.

En punkt $x_0 \in D_f$ är en **stationär punkt** för f om $f'(x_0) = 0$. (Derivatans nollställen ger de stationära punkterna).

Sats 3.5. Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning av punkten x_0 och deriverbar i x_0 och om x_0 är en lokal extrempunkt för f, så är x_0 en stationär punkt.

en lokal maximipunkt

Bevis: Antag att x_0 är ett lokalt maximum (analogt bevis för lokalt minimum). Då finns

lokal minimipunkt

det ett $\delta > 0$ så att om $x \in [x_0 - \delta, x_0]$ ($x \in [x_0, x_0 + \delta]$) så gäller det för differenskvoten att ≤ 0

$$\leq 0 \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{\underset{<0}{x - x_0}} \geq 0 \quad \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{\underset{>0}{x - x_0}} \leq 0 \right).$$

Men då gäller det att

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

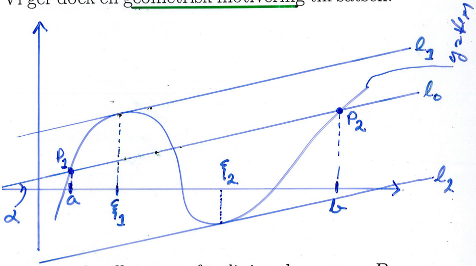
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Eftersom f är deriverbar i x_0 gäller det att $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Enda möjligheten är då att $f'(x_0) = 0$. □

Observera att omvändningen till satsen gäller ej. Ett exempel på detta är funktionen $f(x) = x^3$ för vilken $f'(0) = 0$, så 0 är en stationär punkt men **inte en lokal extrem punkt**, utan en så kallad **terasspunkt**.

En funktion kan ha andra extrempunkter än stationära punkter. Nämligen punkter där derivatan inte är definierad och intervalländpunkter.

Vi skall utan bevis presentera **medelvärdessatsen**.
Vi ger dock en geometrisk motivering till satsen:



Riktningskoefficienten för linjen l_0 genom P_1 och P_2 ges av

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Linjerna l_1 och l_2 är båda parallella med linjen l_0, så vi har

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_2).$$

Sats 3.6. Medelvärdessatsen. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och att $f'(x)$ existerar i det öppna intervallet $]a,b[$. Då finns det minst en punkt $\xi \in]a,b[$ sådan att

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b-a)\,. \tag{3.34}$$

Exempel 3.18. Det gäller för alla reella tal $x_1 < x_2$ att

$$|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1|, \quad (*)$$

ty med stöd av medelvärdessatsen finns det ett ξ i intervallet $]x_1, x_2[$ sådant att

$$\cos x_2 - \cos x_1 = (-\sin \xi)(x_2 - x_1).$$

Då $-\sin \xi$ tillhör intervallet $[-1, 1]$ för alla val av $x_1 < x_2$, så måste formel $(*)$ gälla.

$$|\cos x_2 - \cos x_1| = |-\sin \xi|\,|x_2 - x_1| \leq 1 \cdot |x_2 - x_1|$$

Sats 3.7. Antag att f är kontinuerlig på det slutna intervallet $I = [a, b]$ och deriverbar i det öppna intervallet $]a, b[$. Då gäller:

1. Om $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) på intervallet $]a, b[$, så är f växande (avtagande) på intervallet I.
2. Om $f'(x) > 0$ (< 0) på intervallet $]a, b[$, så är f strängt växande (strängt avtagande) på intervallet I.
3. Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in]a, b[$, så är f konstant på intervallet I.

Derivator

Bevis: 1. Vi utför beviset för $f'(x) \geq 0$ på intervallet $]a,b[$, beviset är analogt i det andra fallet. Välj godtyckligt $x_1, x_2 \in I$ sådana att $x_1 < x_2$. Då finns med stöd av medelvärdessatsen ett $\xi \in]x_1, x_2[$ sådant att

$$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{\geq 0}\overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} \geq 0\,,$$

vilket medför att $f(x_2) \geq f(x_1)$ och f är växande på intervallet I.

2. Antag nu att $f'(x) > 0$ på intervallet $]a, b[$ och att $x_1, x_2 \in I$ är godtyckligt valda med $x_1 < x_2$. Då erhålls för något ξ i $]x_1, x_2[$ att

$$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{>0}\overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} > 0\,,$$

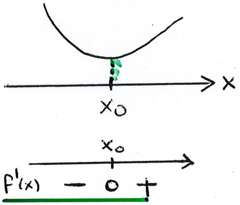
så $f(x_2) > f(x_1)$ gäller och f är strängt växande på intervallet I. Beviset för att $f'(x) < 0$ på intervallet medför att f är strängt avtagande är analogt.

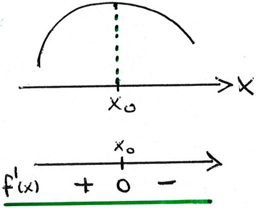
3. Antag att $f'(x) = 0$ för alla $x \in]a, b[$ och tag godtyckligt $x_1, x_2 \in I$, sådana att $x_1 < x_2$. Med stöd av medelvärdessatsen finns ett $\xi \in]x_1, x_2[$ sådant att

$$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{=0}\overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} = 0\,,$$

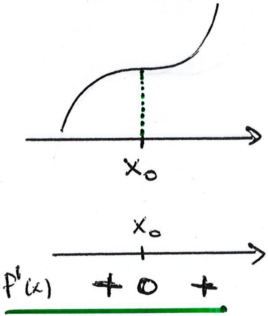
alltså gäller det att $f(x_1) = f(x_2)$ och f är konstant på intervallet I. $\square$

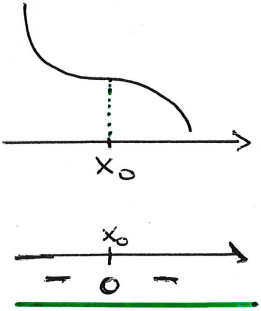
En konsekvens av Sats 3.7 är att karaktären av en stationär punkt x_0, (där $f'(x_0) = 0$), med avseende på lokal maximi- eller minimipunkt för $f(x)$, kan avgöras genom att studera **derivatans teckenväxling** i en omgivning av x_0. Om derivatan är negativ (positiv) i en punkterad vänsteromgivning $]x_0 - \delta, x_0[$ av x_0 och positiv (negativ) i en punkterad högeromgivning $]x_0, x_0 + \delta[$ av x_0, så är x_0 en sträng lokal minimipunkt (maximipunkt) för $f(x)$.





Om derivatan inte byter tecken har vi en **terasspunkt**. I detta fall är x_0 inte en lokal extrempunkt.





En annan tillämpning av derivator är för att bevisa att olikheter gäller i vissa intervall. Vi belyser metodiken med ett exempel.

Exempel 3.20. Visa att

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

för alla $x \geq 0$

Exempel 3.20. Visa att

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

för alla $x \geq 0$

Lösning: Problemet är ekvivalent med att visa att

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} > 0$$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$

för alla $x \geq 0$. Vi studerar derivatan av $f(x)$,

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2)\cdot 1 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{2}{(1+x^2)^2},$$

och observerar att

$$f'(x) < 0 \text{ då } x \geq 0 .$$

Detta betyder att $f(x)$ är strängt avtagande i intervallet $[0, +\infty[$. Vad händer med $f(x)$ då

$x \to +\infty$?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= 0.$$

Därmed gäller det att

$$f(x) > 0\,, \text{ då } x \geq 0\,,$$

och således har vi att

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2} - \arctan x\,, \quad \text{då } x \geq 0\,. \quad \square$$

5. Visa att $x^2 > 1 + 2x \ln x$ för alla $x > 1$.

Lösning: Sätt $f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$. Då är $f(1) = 0$.

$\therefore \; f'(x) = 2x - 2 \cdot \ln x - 2x \cdot \frac{1}{x} = 2(x - \ln x - 1)$. $f'(1) = 0$

> 0, då $x > 1$?

$\therefore \; f''(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \begin{cases} > 0, & x > 1 \\ = 0, & x = 1 \end{cases}$

x	1	
$f''(x)$	0	$+ \;\; + \;\; + \;\; +$
$f'(x)$	0	$\nearrow$ (f' str. växande i $[1, +\infty[$)
$f'(x)$	0	$+ \;\; + \;\; + \;\; +$
$f(x)$	0	$\nearrow$ (f str. växande i $[1, +\infty[$)

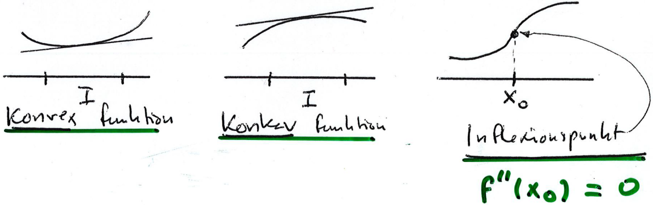
Alltså: $f(x) > 0$ för $x > 1$

$\Longleftrightarrow$

$x^2 > 1 + 2x \cdot \ln x$ för $x > 1$. $\square$

Derivator

Antag att funktionen $f(x)$ är två gånger deriverbar i intervallet I. Om $f''(x) > 0$ på I så ligger grafen av f över sin tangent i varje punkt $x \in I$, vi har en **konvex** funktion. Om $f''(x) < 0$ på I så ligger grafen av f under sin tangent i varje punkt $x \in I$, vi har en **konkav** funktion. Om för $x_0 \in I$ gäller att $f''(x_0) = 0$ och $f''(x)$ byter tecken i x_0 har vi en **inflexionspunkt** där grafen växlar från att ha varit konkav (konvex) till att vara konvex (konkav).



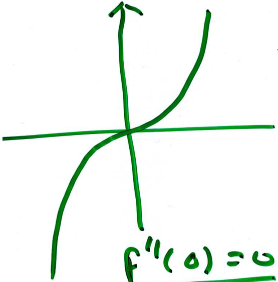
Sats: För en funktion f, som är deriverbar i en omgivning av punkten x_0 med $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0)$ existerar, gäller att

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ har lokalt minimum i x_0

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ har lokalt maximum i x_0.

Satsen säger inget om fallet $f''(x_0)=0$

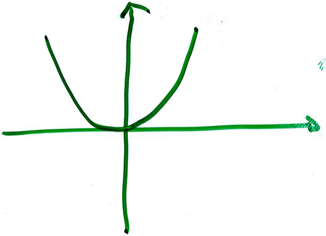
$f(x)=x^3$



$f''(0)=0$

ingen lokal extrempt.
(terasspunkt)

$f(x)=x^4$



$f''(0)=0$

lokalt minimum i $x_0=0$

4.1 Grundläggande egenskaper och exempel

Definition 4.1. Låt $f(x)$ vara definierad på ett intervall I. En deriverbar funktion $F(x)$ kallas en **primitiv funktion** (eller en **primitiv**) till $f(x)$ om det gäller att

$$F'(x) = f(x)$$

för alla $x \in I$.

Om en funktion $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x)$ så har vi en hel skara av funktioner

$$F(x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

som alla är primitiva funktioner till $f(x)$, ty

$$D[F(x) + C] = D[F(x)] + D[C] = F'(x) + 0 = f(x)\,.$$

Men denna skara av funktioner utgör också mängden av alla primitiva funktioner till $f(x)$, ty vi har satsen:

Sats 4.1. Antag att $F(x)$ och $G(x)$ är primitiva funktioner till $f(x)$ på ett intervall I. Då finns det en konstant $C \in \mathbb{R}$ sådan att

$$F(x) = G(x) + C$$

för alla $x \in I$.

Bevis: Definiera för alla $x \in I$ funktionen

$$H(x) = F(x) - G(x).$$

Då gäller det för alla $x \in I$ att

$$\begin{aligned} H'(x) &= D[F(x) - G(x)] = D[F(x)] - D[G(x)] \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Därmed är $H'(x) \equiv 0$ på intervallet I, vilket betyder att $H(x) \equiv C$ på I för någon konstant $C \in \mathbb{R}$ och vi har att $F(x) = G(x) + C$ på intervallet I. □

Sats 3.7

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}, \quad F(x) = \ln\left| x + \sqrt{x^2+\alpha} \right|.$$

Lösning:

$$D(\ln|g(x)|) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$\underline{F'(x)} = D\left(\ln\left| x+\sqrt{x^2+\alpha} \right|\right) = \frac{D\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}$$

$$= \frac{1 + D\left[(x^2+\alpha)^{1/2}\right]}{x+\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1+\frac{1}{2}(x^2+\alpha)^{-1/2} \cdot D[x^2+\alpha]}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}$$

$$= \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+\alpha}}}{x+\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}}}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \underline{f(x)}. \quad \square$$

$$F(x) = G(x) \quad \forall x \in I \;? \qquad (*)$$

$$(F'(x) = f(x) \;,\; g(x) = G'(x))$$

Visa att $f(x) = g(x) \quad \forall x \in I$

$$\Rightarrow \quad F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in I$$

Tag $x_0 \in I$: $C = F(x_0) - G(x_0)$

Om $C = 0$ gäller $(*)$

Primitiva funktioner

En primitiv funktion till en funktion $f(x)$ betecknas med hjälp av (det) obestämda) integraltecknet $\int$,

$$\int f(x)\,dx\,, \qquad (4.1)$$

vilket utläses "integralen av $f(x)\,dx$ eller den obestämda integralen av $f(x)\,dx$". Man bör beakta att denna beteckning inkorporerar en obestämd konstant C. För funktionerna i Exempel 4.1 har vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C\,.$$

Primitiva funktioner

Räknereglerna för derivator ger formlerna,

$$\int \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx\,, \quad \alpha \text{ konstant}\,, \tag{4.2}$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,. \tag{4.3}$$

Primitiva funktioner

Antag att $F'(x) = f(x)$ och $G'(x) = g(x)$

$$(4.2): \quad D[\alpha F(x)] = \alpha \cdot D[F(x)] = \alpha \cdot f(x)$$

$$\therefore \quad \underline{\int \alpha f(x)\,dx} = \alpha \cdot F(x) + \alpha \cdot C = \alpha(F(x)+C) = \underline{\alpha \cdot \int f(x)\,dx}$$

$$(4.3): \quad D[F(x)+G(x)] = D[F(x)] + D[G(x)] = f(x)+g(x)$$

$$\therefore \quad \underline{\int (f(x)+g(x))\,dx} = (F(x)+G(x)) + C$$

$$= (F(x)+C_1) + (G(x)+C_2)$$

$$= \underline{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}.$$

Primitiva funktioner

$$\int \alpha \, dx = \alpha x + C \,, \tag{4.4}$$

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \,, \quad \alpha \neq -1 \,, \tag{4.5}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \,, \tag{4.6}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \,, \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \,, \tag{4.7}$$

Primitiva funktioner

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \,, \tag{4.8}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \,, \tag{4.9}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \,, \tag{4.10}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C \,, \tag{4.11}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C \,, \tag{4.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C \,, \tag{4.13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} \, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+\alpha} \right| + C \,. \tag{4.14}$$

Ex. 4.2. Bestäm primitiva funktioner till

(a) $3x^3 - 5x^2 + 30$, (b) $\dfrac{x^2 \sin x + 5x}{x^2}$

(a) $\int (3x^3 - 5x^2 + 30)\,dx$

$$\overset{(4,2),(4,3)}{=} 3 \cdot \int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + \int 30\,dx$$

$$\overset{(4,5),(4,4)}{=} 3 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) - 5\left(\frac{x^3}{3} + C_2\right) + \left(30x + C_3\right)$$

$$= \underline{\frac{3}{4} \cdot x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 30x + C}.$$

(b) $\displaystyle \int \frac{x^2 \sin x + 5x}{x^2} \cdot dx$

$$= \int \left(\sin x + \frac{5}{x} \right) dx$$

$$\overset{(4.2),(4.3)}{=} \int \sin x \, dx + 5 \cdot \int \frac{1}{x} dx$$

$$\overset{(4.9),(4.6)}{=} (-\cos x + C_1) + 5 \cdot (\ln|x| + C_2)$$

$$= \underline{5 \cdot \ln|x| - \cos x + C}.$$

Då $D \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$, erhålls formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C\,. \qquad (4.15)$$

Exempel 4.3. Beräkna primitiver till

$$(a)\ \tan x\,, \quad (b)\ \cot x\,, \quad (c)\ \frac{2x^3}{2+x^4}\,.$$

(a) $\underline{\int \tan x \, dx}$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{D[\cos x]}{\cos x}\, dx$$

$$\overset{(4.15)}{=} \underline{-\ln|\cos x| + C}.$$

(b) $\underline{\int \cot x \, dx}$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{D[\sin x]}{\sin x}\, dx$$

$$\overset{(4.15)}{=} \underline{\ln|\sin x| + C}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{2+x^4}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2\cdot 2x^3}{2+x^4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{4x^3}{2+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{D[2+x^4]}{2+x^4}\,dx$$

$$\overset{(4,15)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln|2+x^4| + 2\cdot C\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2+x^4) + C.$$

$F(x),\ g(x)$ deriverbara, $F'(x) = f(x)$ och betrakta

$$F(g(x)) + C\,, \quad C \text{ konstant.}$$

Då gäller $D[F(g(x)) + C] = F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)$, och vi får formeln

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C\,, \quad \text{där } F'(x) = f(x) \qquad (4.16)$$

(**Obs!** Formel (4.15) specialfall av (4.16) med ~~…~~ $\ln|x|$ yttre fkt. $g(x) = f(x)$ inre fkt.)

Exempel 4.4. Som en tillämpning av formel (4.16) fås att

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2) + C\,,$$

där vi har $F(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ och $g(x) = x^2$.

Speciellt om vi i (4.16) väljer x^α som yttre funktion och $f(x)$ som inre funktion får vi formeln

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad \alpha \neq -1\,. \tag{4.17}$$

<u>Ex. 4.5.</u> Beräkna med hjälp av (4.17), $\alpha = 1$, (145)

(a) $\int f(x) \cdot f'(x)\, dx$, (b) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$

(a) $\underline{\int f(x) \cdot f'(x)\, dx}$

$$= \int f(x)^1 \cdot f'(x)\, dx \overset{(4.17)}{=} \underline{\frac{f(x)^2}{2} + C}.$$

(b) $\underline{\int \cos x \cdot \sin x \, dx}$

$$= \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \int (\sin x)^1 \cdot D[\sin x]\, dx$$

$$\overset{(4.17)}{=} \underline{\frac{\sin^2 x}{2} + C}.$$

4.2 Partiell integration

Om det verkar besvärligt att bestämma en primitiv funktion till en produkt $f(x)g(x)$, medan uttrycket $F(x)g'(x)$ verkar enklare, kan man prova på metoden att **partialintegrera** funktionen $f(x)$.

Sats 4.2. (**Partiell integration.**) Antag att $F'(x) = f(x)$ och att $g(x)$ är en deriverbar funktion. Då gäller

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx\,. \tag{4.18}$$

Bevis: Formelns giltighet verifieras genom direkt derivering av högra ledet,

$$
\begin{aligned}
&D\left[F(x)g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx\right] \\
&= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) \\
&= F'(x)g(x) \\
&= f(x)g(x)\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

Exempel 4.6. Beräkna

$$(a)\quad \int x \sin x \, dx\,, \qquad (b)\quad \int \ln x \, dx\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

(a) $\underline{\int x \cdot \sin x \, dx}$

$$= \int \overset{f}{\sin x} \cdot \overset{g}{x} \, dx \overset{\text{P.I.}}{=} \overset{F}{(-\cos x)} \cdot \overset{g}{x} - \int \overset{F}{(-\cos x)} \cdot \overset{g'}{1} \cdot dx$$

$$= \int \cos x \, dx - x \cdot \cos x = (\sin x + C) - x \cdot \cos x$$

$$= \underline{\sin x - x \cdot \cos x + C}.$$

(b) $\underline{\int \ln x \, dx}$

$$= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\ln x} \, dx \overset{\text{P.I.}}{=} \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\ln x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{x}} \cdot dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$= \underline{x(\ln x - 1) + C}.$$