# Grundkurs i analys, v.46

Man kan visa att alla elementära funktioner är kontinuerliga i sina definitionsmängder. Vi motiverar detta enbart för polynom och rationella funktioner.

**Exempel 2.16.** $f(x) = x$ är kontinuerlig i varje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, ty

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \Rightarrow f(x) \to f(x_0), \quad \text{då } x \to x_0$$

( $\delta = \varepsilon$ duger i gränsvärdesdefinitionen)

Räknelagarna för gränsvärden ger direkt att om $f$ och $g$ är kontinuerliga funktioner, så är också $f+g$, $fg$, $f/g$ och $f \circ g$ kontinuerliga i sina definitionsmängder. Som en konsekvens av detta och att $f(x) = x$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ får vi att alla **polynom är kontinuerliga** i $\mathbb{R}$ och alla **rationella funktioner är kontinuerliga i sina definitionsmängder.** Vidare kan man visa att **alla elementära funktioner**, som behandlades i Kapitel 1, **är kontinuerliga i sina definitionsmängder**.

För funktioner kontinuerliga i en punkt $a$ fås följande variant av Sats 2.3. (sammansättningsregeln)

**Sats 2.6.** Om $g(x) \to a$ då $x \to x_0$, där $a \in \mathbb{R}$, och funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i $a$, så gäller

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(a)\,.$$

**Exempel 2.17.** Då $\tan x \to 0$ då $x \to 0$ och $\cos x$ är kontinuerlig i 0, gäller

$$\lim_{x \to 0} \cos(\tan x) = \cos(\lim_{x \to 0} \tan x) = \cos(0) = 1\,.$$

Vi undersöker gränsvärdet av två talföljder.

**Exempel 2.18.** Visa att för heltaligt $n$ och $a > 0$ gäller

$$\lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

**Lösning:** Då $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ och funktionen $a^x$ är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$, samt $1/n \to 0$ då $n \to \infty$, gäller det att

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = a^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = a^0 = 1\,.$$

För det andra gränsvärdet gör vi omskrivningen $n^{1/n} = e^{\ln n^{1/n}}$ och får att

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{1/n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1\,.$$

**Ex. 2.19.** Visa att $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$.

**Lösning:** För $x > 0$ gäller: $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} \underset{\uparrow \text{ Sats 2.6}}{=} e^{\lim_{x \to 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

$\begin{cases} x \ln x \to 0, \text{ då } x \to 0^+, \ (2.4) \\ e^t \text{ kontinuerlig i } t = 0 \end{cases}$

Vi avslutar detta avsnitt med att citera en sats som ger en uppräkning av egenskaper, (som är intuitivt accepterbara), för kontinuerliga funktioner på slutna intervall.

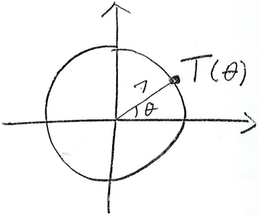
**Sats 2.7.** Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$, så gäller följande påståenden:

1. $f(x)$ är begränsad i intervallet,
2. $f(x)$ antar varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$,
3. $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde i intervallet.

**Exempel 2.20.** Antag att temperaturen i en cirkulär stålring med radien 1 varierar kontinuerligt. Visa att det finns minst 2 diametralt motsatta punkter med samma temperatur.

Lösning: Sätt

Temperaturen $= T(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
$(\theta \in [0, 2\pi])$




Då gäller: $T(0) = T(2\pi)$.

Bildar funktionen: $F(\theta) = T(\pi + \theta) - T(\theta)$,
$0 \leq \theta \leq \pi$.

Då är $F(\theta)$ kontinuerlig på slutna intervallet $[0, \pi]$

$$F(0) = T(\pi + 0) - T(0) = T(\pi) - T(0).$$

$$F(\pi) = T(\pi + \pi) - T(\pi) = T(2\pi) - T(\pi)$$
$$= T(0) - T(\pi) = -(T(\pi) - T(0))$$
$$= -F(0).$$

Enligt Sats 2.7 antar $F(\theta)$ alla värden mellan $F(0)$ och $-F(0)$.

Alltså finns det ett $\theta_0 \in [0, \pi]$ sådant att $F(\theta_0) = 0$.

Då gäller: $T(\theta_0 + \pi) - T(\theta_0) = 0 \iff T(\theta_0) = T(\theta_0 + \pi)$

(På ekvatorn finns minst två diametralt motsatta punkter med samma temperatur.)

### 2.3 Monotona funktioner

**Definition 2.8.** Funktionen $f(x)$ är **uppåt begränsad** (**nedåt begränsad**) på mängden $M \subseteq D_f$ om det finns ett tal $B$ ($b$) sådant att $f(x) \leq B$ ($f(x) \geq b$) för alla $x \in M$. Funktionen $f(x)$ är **begränsad** på $M$ om $f(x)$ är både uppåt och nedåt begränsad på $M$.

**Exempel 2.20.** Funktionen $f(x) = e^x$ är nedåt begränsad av $b = 0$ på $\mathbb{R}$, men inte uppåt begränsad.

$g(x) = 1/x$ är uppåt begränsad av $B = 0$ på $\mathbb{R}_-$, men inte nedåt begränsad.

$h(x) = \arctan x$ är begränsad på $\mathbb{R}$, $B = \pi/2$ och $b = -\pi/2$.

**Sats 2.8.** Om $f(x)$ är **växande** och **uppåt begränsad** på en mängd $M = \{x : x \geq c\}$, så existerar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Om $f(x)$ är **avtagande** och **nedåt begränsad** på en mängd $M = \{x : x \geq c\}$, så existerar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**Exempel 2.22. Talet e.** Betrakta talföljden

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Med binomialsatsen kan vi skriva $f(n)$ i formen

$$f(n) = \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} .$$

Ovanstående summa består av $n+1$ stycken termer $a_0, \ldots, a_n$. Låt oss undersöka den $k$ :te termen,

# Gränsvärden

$$a_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!\, n^k}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \, .$$

Vi gör följande observationer:

(1) Alla termer $a_k > 0$ ;

(2) När $n$ växer, så ökar antalet termer $a_k$ ;

(3) För fixt $k$ växer termen $a_k$ med växande $n$ .

Med stöd av (1), (2) och (3) drar vi slutsatsen att $f(n)$ **är växande** då $n \to \infty$. Uppskattningen

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{då } k \geq 2$$

ger att

$$a_k < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{då } k \geq 2\,.$$

Därmed erhålls att

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

$$= 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} < 1 + \frac{1}{1-(1/2)} = 3\,.$$

Alltså gäller det att $f(n) < 3$ för alla $n$. Då är $f(n)$ **växande** och **uppåt begränsad**, så med stöd av Sats 2.8 existerar gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

**Definition 2.9.** Gränsvärdet

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (\approx 2.71828) \qquad (2.5)$$

Kallas för den naturliga logaritmens bas. (irrationellt tal).

**Exempel 2.22.** Visa att för $a \in \mathbb{Z}_+$ erhålls gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{an}\right)^n = e^{1/a}.$$

**Lösning:** (Se föreläsningsanteckningar).

Lösning:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{an}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a\cdot n}\right)^{an\cdot\frac{1}{a}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{a\cdot n}\right)^{an}\right]^{\frac{1}{a}}$$

$\left(1+\frac{1}{a\cdot n}\right)^{a\cdot n} \longrightarrow e$, då $n\to\infty$, (ty $an\to\infty$)

funktionen $f(x) = x^{1/a}$ kont. i punkten $x = e$

Sats 2.6

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a\cdot n}\right)^{an}\right]^{1/a}$$

$$= e^{1/a}.$$

# Gränsvärden

Vi betraktar nu funktionen

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x > 0,$$

som alltså är definierad för alla positiva reella tal $x$. Har denna funktion ett gränsvärde då $x \to +\infty$? För att undersöka detta låter vi $n = [x]$, dvs. heltalsdelen av $x$, som uppfyller $x - 1 < n \leq x$. För $x \geq 1$ erhålls uppskattningarna

$$(a)\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$(b)\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}.$$

Högerleden i $(a)$ och $(b)$ går mot talet $e$ då $x \to +\infty$. Då ger instängningsregeln i Sats 2.4 att

# Gränsvärden

$f(x) \to e$ då $x \to +\infty$, och vi har visat det första **standardgränsvärdet** i följande sats.

**Sats 2.9.** Det gäller att

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\,, \qquad (2.6)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\,, \qquad (2.7)$$

$$\lim_{x\to 0}\Big(1+x\Big)^{1/x} = e\,. \qquad (2.8)$$

**Bevis:** 1) För att bevisa formel (2.7) tillämpar vi sammansättningsregeln genom att införa variabeln $t = -x$ och utnyttjar gränsvärdet (2.6). Det gäller att $t \to +\infty$ om $x \to -\infty$ och vi får att

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t} = \left(\frac{1-t}{-t}\right)^{-t} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}\\ &= \left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^{t} = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}\\ &= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\\ &\to e \cdot 1 = e\,, \text{ då } x \to -\infty\,.\end{aligned}$$

2) För att bevisa formel (2.8) sätter vi $t = 1/x$. Om nu $x \to 0^+$ så gäller det att $t \to +\infty$ och vi får med stöd av (2.6) att

$$\left(1+x\right)^{1/x} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \to e\,,\text{då } x \to 0^+\,.$$

Om $x \to 0^-$ så gäller det att $t \to -\infty$ och nu ger (2.7) att

$$\left(1+x\right)^{1/x} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \to e\,,\text{då } x \to 0^-\,.$$

Därmed är formel (2.8) bevisad. □

**Exempel 2.23.** För $x \neq 0$ gäller att

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x ,$$

ty då $t \to \pm\infty$ gäller det att $t/x \to \pm\infty$ och då potensfunktionen $(\cdot)^x$ är kontinuerlig i punkten $e$, erhålls

$$\left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = \left(1 + \frac{1}{t/x}\right)^{\frac{t}{x}\cdot x} = \left(\left(1 + \frac{1}{t/x}\right)^{t/x}\right)^x$$

$$\to e^x \text{ då } t \to \pm\infty .$$

Vi presenterar ännu två **standardgränsvärden**:

**Sats 2.10.** Det gäller att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,, \tag{2.9}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,. \tag{2.10}$$

**Bevis:** 1) Eftersom naturliga logaritmen är kontinuerlig i punkten $e$ erhålls, med stöd av (2.8), att

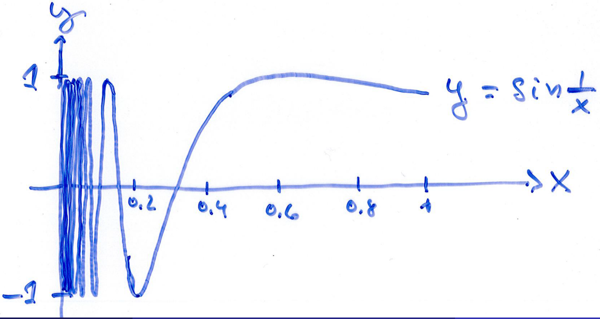
$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln((1+x)^{1/x}) \to \ln e = 1\,, \text{ då } x \to 0\,.$$

2) Vi sätter $x = \ln(1+y) \Leftrightarrow y = e^x - 1$. Då gäller det att $y \to 0$ då $x \to 0$, och vi får

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} \to \frac{1}{1} = 1\,, \text{ då } x \to 0\,. \quad \square$$

**Sats 2.11.** Om funktionen $f(x)$ är **begränsad** och **monoton** i en högeromgivning $]a, a+\delta[$ av punkten $a$, så existerar gränsvärdet $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Om funktionen $f(x)$ är **begränsad** och **monoton** i en vänsteromgivning $]a-\delta, a[$ av punkten $a$, så existerar gränsvärdet $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

**Exempel 2.25.** Funktionen $f(x) = 1/x$ är monoton men inte begränsad i någon högeromgivning av 0, $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$.
$g(x) = \sin \frac{1}{x}$ är begränsad men ej monoton i varje högeromgivning av 0.



## Viktigt exempel för beräkning av gränsvärden.

Ex: Antag att $\lim_{x \to a} f(x) = A > 0$ och $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, där $a \in \mathbb{R}$ eller $a = \pm\infty$. Visa att $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

Bevis: Då $f(x) \to A > 0$, är $f(x) > 0$ i en omgivning av $a$.

Sätt $U$: $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$

1°) $g(x) \cdot \ln f(x) \xrightarrow[\text{då } x \to a]{} B \cdot \ln A$, ty $\ln x$ är kont. i punkten $A > 0$.

2°) Då $e^x$ är kont. i punkten $B \cdot \ln A$ gäller:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{B \cdot \ln A} = e^{\ln A^B} = A^B.$$

Ex Har funktionerna

(a) $f(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)^x$, (b) $g(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)^{x \arctan x}$

gränsvärden då $x \to +\infty$?

# Gränsvärden

(a)
$$\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x} = \left(\frac{x+2-2}{x+2}\right)^{x} = \left(1+\frac{-2}{x+2}\right)^{x}$$
$$= \left(1+\frac{1}{-\frac{x+2}{2}}\right)^{x}$$
$$= \left(1+\frac{1}{-\frac{x+2}{2}}\right)^{-\frac{x+2}{2}\cdot\left(-\frac{2x}{x+2}\right)}$$
$$= \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{-\frac{x+2}{2}}\right)^{-\frac{x+2}{2}}}_{\to e}\Bigg]^{-\frac{2x}{x+2}} = E$$

$\longrightarrow e$, då $x \to +\infty$,

ty då går $-\frac{x+2}{2} \to -\infty$

# Gränsvärden

$$E = -\frac{2x}{x+2} = -\frac{2}{1+\frac{2}{x}} \longrightarrow -2, \quad \text{då } x \to +\infty$$

Alltså gäller! (Med stöd av ovanstående)

$$\left(\frac{x}{x+2}\right)^x \longrightarrow e^{-2}, \quad \text{då } x \to +\infty$$

b) $$g(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)^{x \arctan x}$$

$$\arctan x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\underbrace{\left(\frac{x}{x+2}\right)^x}_{\longrightarrow\, e^{-2} > 0}\right]^{\arctan x}$$

$$\longrightarrow (e^{-2})^{\frac{\pi}{2}} = e^{-\pi}, \quad \text{då } x \to +\infty$$

(Med stöd av ovanstående)

Ex. Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+n)^n e^n - n^n \cdot 2^n}{e^n (n^n + n!)}$.

Lösning: Undersök $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}{n\cdot n \cdots n} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}$

$< \dfrac{1}{n}\cdot 1 \cdots 1$, då $n > 2$,

$\longrightarrow 0$, då $n\to\infty$.

Alltså: $\boxed{\dfrac{n!}{n^n} \longrightarrow 0, \text{ då } n\to\infty}$.

$$\frac{(1+n)^n e^n - n^n \cdot 2^n}{e^n (n^n + n!)} = \frac{\cancel{e^n n^n}^{\,1}\left(\frac{(1+n)^n}{n^n} - \frac{2^n}{e^n}\right)}{\cancel{e^n n^n}_{\,1}\left(1 + \frac{n!}{n^n}\right)}$$

$$= \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{\to e} - \overbrace{\left(\overset{<1}{\frac{2}{e}}\right)^n}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\to 0}} \longrightarrow \frac{e-0}{1+0} = e, \text{ då } n\to\infty$$

Ex. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a>0$.

Lösning: Sätt $k=[a]+1$. För $n>k$ gäller:

$$0 \le \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{k}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n} \le \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}\cdots\frac{a}{k}$$

$$= \underbrace{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{k}}_{c}\cdot\left(\frac{a}{k}\right)^{n-k} = c\cdot\left(\frac{a}{k}\right)^{n-k}, \quad \frac{a}{k}<1.$$

$$\therefore \quad 0 \le \frac{a^n}{n!} \le \underbrace{c\cdot\left(\frac{a}{k}\right)^{n-k}}_{\longrightarrow 0,\ \text{då } n\to\infty}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0}$$ (Sats 2.4, instängningsregeln)

Ex. För givet stort tal $A>0$ gäller (med stöd av förra exemplet): $\frac{A^n}{n!}<1$ för tillräckligt stort $n$, $n>\omega$.

Alltså: $\sqrt[n]{n!} > A$ för $n>\omega$. $\therefore$ $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty}$

# Gränsvärden

**Bör memoreras!**

$$\frac{x^k}{a^x} \to 0\,,\ \text{då } x \to +\infty\,, \quad (a > 1)\,, \tag{2.11}$$

$$\frac{{}^a\!\log x}{x^k} \to 0\,,\ \text{då } x \to +\infty\,, \quad (a > 1)\,, \tag{2.12}$$

$(x \ln x)$

$$x^\alpha\, {}^a\!\log x \to 0\,,\ \text{då } x \to 0^+\,, \quad (a > 1,\ \alpha > 0)\,, \tag{2.13}$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1\,,\ \text{då } x \to 0\,, \tag{2.14}$$

# Gränsvärden

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e\,,\ \text{då } x \to \pm\infty\,, \tag{2.15}$$

$$\left(1+\frac{t}{x}\right)^{x} \to e^{t}\,,\ \text{då } x \to \pm\infty\,, \tag{2.16}$$

$$\left(1+x\right)^{1/x} \to e\,,\ \text{då } x \to 0\,, \tag{2.17}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e\,,\ \text{då } \cancel{x \to \pm\infty}\,, \ n \to \infty \tag{2.18}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1\,,\ \text{då } x \to 0\,, \tag{2.19}$$

$$\frac{e^{x}-1}{x} \to 1\,,\ \text{då } x \to 0\,, \tag{2.20}$$

# Gränsvärden

$$\sqrt[n]{a} \to 1\,, \text{ då } n \to \infty\,, \quad a > 0 \tag{2.21}$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1\,, \text{ då } n \to \infty\,, \tag{2.22}$$

$$\frac{n!}{n^n} \to 0, \text{ då } n \to \infty,$$

$$\frac{a^n}{n!} \to 0, \text{ då } n \to \infty,$$

$$\sqrt[n]{n!} \to +\infty, \text{ då } n \to \infty.$$

## 2.5 Tillämpning av gränsvärden på serier

Vi ger några exempel på tillämpning av gränsvärden på serier.

Betrakta en talföljd $(a_k)_{k=0}^{\infty}$. Då kan vi definiera en ny talföljd $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ genom

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
&\vdots \\
s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

På detta sätt konstruerar vi en **serie**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

där talen $a_k$ är seriens **termer** och talen $s_k$ dess **partialsummor**.

# Gränsvärden

Om partialsummorna har ett gränsvärde, $\lim_{k\to\infty} s_k = S$, så är serien **konvergent** med summan $S$, i annat fall är serien **divergent**.

Betrakta en **geometrisk serie** där $a \neq 0$,

$$a + ax + ax^2 + \dots .$$

Dess partialsummor är geometriska summor,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} ax^k = a\,\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \text{om } x \neq 1,$$

$$s_n = a(n+1), \quad \text{om } x = 1.$$

Då ser vi direkt att den geometriska serien är konvergent om och endast om $|x| < 1$ och dess summa $S$ ges då av

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = \frac{a}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

# Gränsvärden

En annan typ av konvergenta serier som man kan beräkna summan av är serier med teleskoperande partialsummor. Vi ger ett exempel på en dylik.

**Exempel 2.25.** Serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

är konvergent, ty en omformning av termerna

# Gränsvärden



$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k}$$

$$\frac{(a+b)k - b}{k(k-1)}$$

$\therefore a = 1, b = -1$

ger att

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

så det allmänna uttrycket för partialsummorna blir

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$+ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \ldots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}.$$

Vi ser då att $s_n \to 1$ då $n \to \infty$ och den givna serien är konvergent med summan $S = 1$.

Om en serie har positiva termer så bildar följden av partialsummor en växande talföljd. Om man kan visa att denna följd är uppåt begränsad så ger Sats 2.8 att partialsummorna har ett gränsvärde och serien är konvergent.

Vi återkommer till teorin för serier i andra delen av kursen.

### 3.1 Definitioner och räkneregler

Vi betraktar avbildningar $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ som är definierade i en omgivning av punkten $x_0 \in D_f$.

**Definition 3.1.** Antag att $f(x)$ är definierad i en omgivning av punkten $x_0$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar så säges $f(x)$ vara **deriverbar** i punkten $x_0$. Gränsvärdet kallas **derivatan** av $f(x)$ i punkten $x_0$ och betecknas

$$f'(x_0), \ \frac{df}{dx}(x_0) \text{ eller } Df(x_0).$$

# Derivator

Om $f(x)$ är deriverbar i varje punkt i $D_f$ så säger vi att $f(x)$ är **deriverbar**, och funktionen $x \curvearrowright f'(x)$, $x \in D_f$, kallas **derivatan** av $f(x)$, med beteckningarna

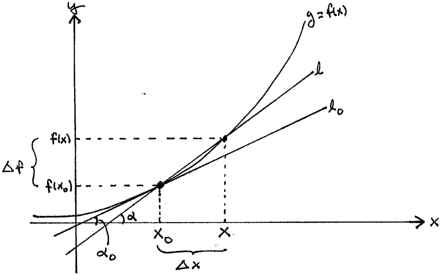
$$f'(x)\,, \quad \frac{df}{dx}(x) \text{ eller } Df(x)\,.$$

**Observera** att vi har ett alternativt skrivsätt av $f'(x_0)$ som ett gränsvärde, nämligen om vi sätter $x - x_0 = h$, så gäller $h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$, och vi får att definitionen på gränsvärde i punkten $x_0$ kan skrivas i formen

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vi kommer att använda båda skrivsätten.

Med hjälp av det senare skrivsättet gör vi en **geometrisk tolkning** av begreppet derivata:




Vi har här beteckningarna $\Delta x = x - x_0$ och $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ och definerar begreppet **differenskvot** genom

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

och tolkar denna som den "genomsnittliga tillväxten av $f$ i intervallet $[x_0, x]$". Vi ser vidare att riktningskoefficienten för sekanten $l$ genom punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x, f(x))$ ges av

$$\tan\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Tillväxthastigheten i punkten $x_0$ definieras som

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \tan\alpha_0.$$

**Definition 3.2.** $l_0$ är kurvtangenten till $f(x)$ i punkten $x_0$. Tangentens riktningskoefficient och ekvation ges av

$$\tan \alpha_0 = f'(x_0) \quad \text{och} \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

**Normalen** till $f(x)$ i punkten $x_0$ står vinkelrätt mot tangenten i punkten $x_0$. Normalen har riktningskoefficient $-1/f'(x_0)$ och ges av ekvationen

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,, \quad \text{om } f'(x_0) \neq 0\,.$$

**Exempel 3.2.** Funktionerna $f(x) = K$ (= konstant) och $g(x) = x$ är deriverbara för alla $x \in \mathbb{R}$ med derivatorna

$$f'(x) = 0 \quad \text{och} \quad g'(x) = 1\,. \qquad (3.1)$$

Lösning: Tag $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{K - K}{x - x_0} = 0$, för alla $x \neq x_0$,

$\therefore \lim_{x \to x_0} 0 = 0 = f'(x_0)$, $\therefore f'(x) = 0$

2) $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$, för alla $x \neq x_0$,

$\therefore \lim_{x \to x_0} 1 = 1 = g'(x_0)$, $\therefore g'(x) = 1$

**Exempel 3.3.** Betrakta potensfunktionen $f(x) = x^n\,,\ n \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller

$$f'(x) = n\,x^{n-1}\,, \tag{3.2}$$

ty vi har för fixt $x_0 \in \mathbb{R}$ och med stöd av binomialsatsen att

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x_0 + (x - x_0))^n - x_0^n}{x - x_0}$$

$$= \frac{\binom{n}{0} x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1}(x - x_0) + \ldots + \binom{n}{n} x_0^0 (x - x_0)^n - x_0^n}{(x - x_0)}$$

$$= \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2}(x - x_0) + \ldots$$

$$+ \binom{n}{n} x_0^0 (x - x_0)^{n-1}$$

$$\longrightarrow \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}\,, \quad \text{då } x \to x_0\,.$$

**Exempel 3.4.** Är funktionen $f(x) = |x|$ deriverbar i $x = 0$?

**Lösning:** Vi bildar differenskvoten:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1\,, & \text{då } x > 0; \\ -1\,, & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Vi drar slutsatsen att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ inte existerar, $f(x)$ är inte deriverbar i $x = 0$. Detta visar att kontinuitet i en punkt inte garanterar deriverbarhet i punkten. I detta fall har vi dock en **högerderivata** och en **vänsterderivata** i origo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1\,.$$

**Sats 3.1.** Om funktionen $f(x)$ är deriverbar i punkten $x_0$, så är $f(x)$ kontinuerlig i punkten.

**Bevis:** Vi har att ( för alla $x \neq x_0$ )

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

då $x \to x_0$,

så $f(x) \to f(x_0)$ då $x \to x_0$. □

(dvs. $f(x)$ kont. i $x_0$)

**Ex** En funktion som är deriverbar i en punkt och diskontinuerlig i övriga punkter.

Definiera: $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{om } x \text{ rationell}, \\ -x^2, & \text{om } x \text{ irrationell}. \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$.

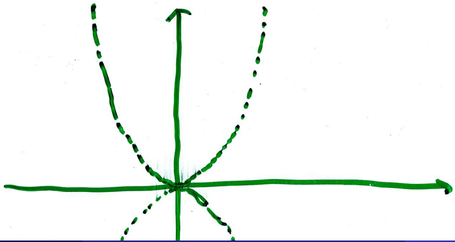
i) klart att f diskontinuerlig i $x_0 \neq 0$.

2°) Betrakta differenskvoten i $x_0 = 0$:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} h, & \text{om } h \text{ rationell} \\ -h, & \text{om } h \text{ irrationell} \end{cases}$$

Enligt tidigare exempel är då:

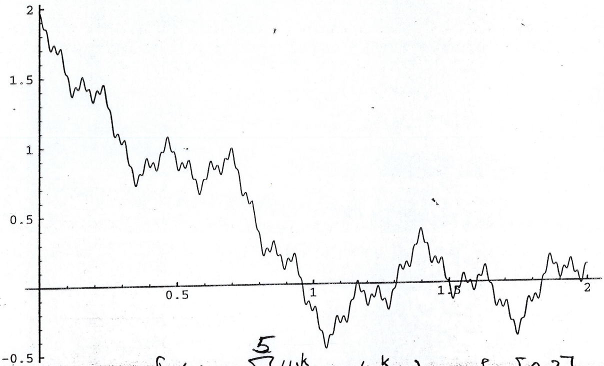
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0 = f'(0).$$



**Extra:** **Weierstrass funktion**

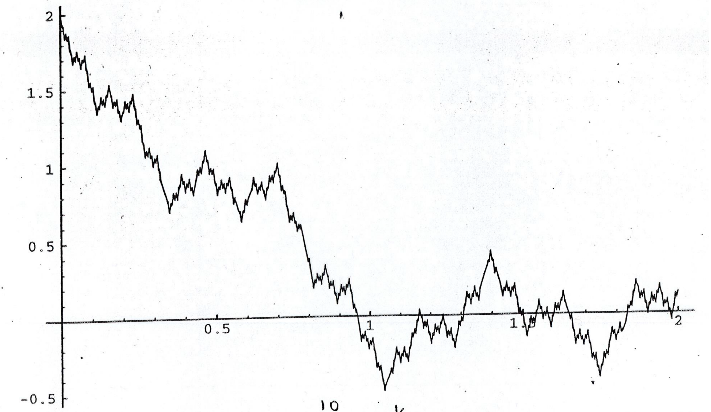
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \cdot x) \quad , \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b \text{ udda heltal}, \quad b > \frac{1}{a} \end{cases}$$

f kont. på $\mathbb{R}$, saknar derivata i varje punkt.




$$f_5(x) = \sum_{k=0}^{5} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cos(3^k \cdot x) \quad \text{på } [0,2]$$

# Derivator



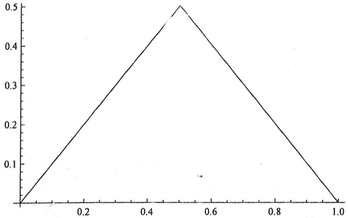

$$f_{10}(x) = \sum_{k=0}^{10} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cdot \cos(3^k \cdot x) \quad \text{på } [0,2]$$

```
In[1]:= f[x_] := x /; 0 ≤ x ≤ 1/2

In[2]:= f[x_] := 1 - x /; 1/2 < x ≤ 1

In[3]:= Plot[f[x], {x, 0, 1}]
```

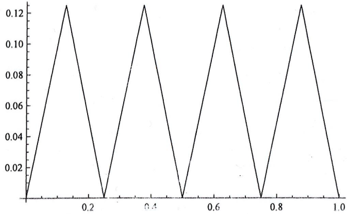
Out[3]=



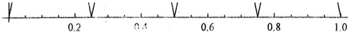

```
In[4]:= g[k_, x_] := 2^(-k) f[2^k x - Floor[2^k x]]

In[5]:= Plot[g[2, x], {x, 0, 1}]
```

Out[5]=



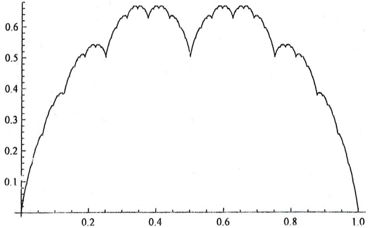

$$g_k(x) = 2^{-k}\cdot f(2^k\cdot x - [2^k\cdot x])$$




```
In[6]:= h[n_, x_] := Sum[g[k, x], {k, 0, n}]

In[7]:= Plot[h[100, x], {x, 0, 1}]
```

Out[7]=




$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

$$\sum_{k=0}^{100} 2^k \approx 2{,}5 \cdot 10^{30}$$

Spetsar

$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,x)$ en kontinuerlig funktion på $[0,1]$ som saknar derivata i varje punkt.

Vi har följande räkneregler för derivering:

**Sats 3.2.** Antag att funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara i punkten $x_0$. Då gäller det att

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,, \tag{3.3}$$

$$(Kf)'(x_0) = K\,f'(x_0)\,, \quad K \text{ är en konstant}\,, \tag{3.4}$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,, \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,, \quad \text{om } g(x_0) \neq 0 \tag{3.6}$$

**Exempel 3.5.** Betrakta polynomet

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,.$$

Med stöd av formlerna (3.2) och (3.4) har vi att $Da_k\, x^k = a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Upprepad användning av formel (3.3) ger då derivatan av polynomet:

$$p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1 \qquad (3.7)$$

(3.2) $D(x^n) = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

**Exempel 3.6.** Härled deriveringsformeln

$$\underline{Dx^{-n} = -nx^{-(n+1)}\,, \quad n \in \mathbb{Z}_+} \,. \qquad (3.8)$$

Lösning:

$$\underline{Dx^{-n}} = D\left(\frac{1}{x^n}\right) \overset{(3.6)}{=} \frac{x^n \cdot \overbrace{D1}^{=0} - (Dx^n)\cdot 1}{(x^n)^2} \overset{(3.2)}{=} -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= \underline{-n \cdot x^{-n-1}}\,.$$