

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 47

1. Derivera funktionen

$$f(x) = \int_{\ln x}^{\cos x} e^{-t^2} \cos t \, dt.$$

2. Visa att för $x > e$ gäller att

$$\int_1^{\ln x} \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt < \ln x.$$

3. Beräkna

$$\int_1^e (\ln x)^2 \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x + 4 \cos x + 6} ?$$

4. Räkna ut den generaliserade integralen $\int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx$.

5. Härled genom partiell integration en rekursionsformel för

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

6. Räkna ut följande generaliserade integraler om de är konvergenta

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln(2+3x)}{x^2} \, dx.$$

7. Avgör med hjälp av jämförelsesatsen om följande generaliserade integraler är konvergenta:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \ln x}, \quad \int_1^{\infty} x^{-x} \, dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + \tanh x}.$$

8. Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2} \, dx$$

är konvergent och bestäm dess värde. Ledning: Dela upp intervallet $[1, \infty[$ med 1 som delningspunkt. Visa att de två integraler som uppstår är konvergenta och har motsatta värden.

9. Räkna ut dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

där D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Ledning: Använd polära koordinater.

10. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

där D är cirkelskivan kring $(0, 0)$ med radien R . Ledning: Inför polära koordinater.

11. Räkna ut trippelintegralen

$$\iiint_D dx \, dy \, dz,$$

där $D = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, genom upprepad integration.