Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 42

1. Om $f(x) = f_1(x)^{a_1} \dots f_n(x)^{a_n}$, så är $\ln|f(x)| = a_1 \ln|f_1(x)| + \dots + a_n \ln|f_n(x)|$. Genom derivering (*logaritmisk derivering*) fås (där $f(x) \neq 0$)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a_1 \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \dots + a_n \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\,.$$

   Derivera funktionen $(x+2)^3 \cdot \tan^3 x \cdot \frac{1}{\sqrt{\arctan x}}$ med hjälp av denna formel.

2. Derivera funktionerna

$$x\cos(x^2), \qquad \frac{x^2+x+1}{e^x}, \qquad \arctan(\ln(1+x^2)), \qquad \arcsin(x^{\sin x})\,.$$

3. Visa att $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ för $|x| < 1/\sqrt{2}$ genom att studera derivatorna för bägge leden.

4. Ekvationen $\sin(tx) = x$ definierar en funktion $x(t)$ $(t > 1)$ (man "löser ut" x som funktion av t). Räkna ut $x'(t)$ genom implicit derivering.

5. En tank har formen av en rät cirkulär kon med spetsen nedåt. Tankens höjd är 10 m och dess diameter längst uppe är 20 m. Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. In i tanken rinner 1 m^3 bensin per sekund. Hur snabbt stiger vätskeytan vid tiden t (> 0) mätt i meter per sekund?

6. Visa att funktionen $f(x) = x + \sin x$ är strängt växande. Räkna ut $(Df^{-1})(\frac{\pi}{2}+1)$, dvs. derivatan för den inversa funktionen för argumentet $\frac{\pi}{2}+1$.

7. Räkna ut $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$, då

$$f(x,y) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}\,.$$

8. Räkna ut derivatan (med avseende på t) av funktionen $f(\tan(t^2), \arctan\frac{1}{t})$, där funktionen $f(x,y)$ antas ha tillräckliga egenskaper för att kedjeregeln för funktioner med flera variabler skall kunna användas.

9. Bestäm extremvärden samt globala maxima och minima till

$$f(x) = x^2 e^x\,.$$

10. Visa (genom att studera differensen mellan de två leden) att

    (a) $2\ln x > 4x - x^2 - 3$ för $x > 1$;

    (b) $\arctan x \leq \frac{3x+x^3}{3+2x^2}$ för $x \geq 1$ (och t.o.m. för $x \geq 0$).

11. En fabrik vill minimera materialåtgången vid tillverkning av en konservburk med volymen 1 dm^3. Vilka proportioner bör burken ha?