

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 40

1. Visa med hjälp av formeln $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ att funktionen $\sin x$ är kontinuerlig (dvs. visa att $|\sin x - \sin x_0| \rightarrow 0$ då $x \rightarrow x_0$).
2. Bestäm först $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)/x$ och därefter

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + 2x^3}{\sin x + x^2 \cosh x}.$$

3. Bestäm med hjälp av formeln $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ gränsvärdena

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^3 + 27}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[3]{x + x^{2/3}} - \sqrt[3]{x} \right).$$

4. En talföljd definieras av $a_0 = 10, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 2} + 3$. Visa att följden är strängt avtagande (dvs. att $a_{n+1} < a_n$) genom att studera tecknet hos differensen $a_{n+1} - a_n$. Vilket tal konvergerar följden mot om den konvergerar.

5. Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \sin^2 \sqrt{x}}{x + x\sqrt{x}}.$$

6. Räkna ut $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ då

$$a_n = \frac{n + (-1)^n \sqrt{n} \ln(\sqrt{n})}{n + 1}.$$

7. Har funktionen

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+2} \right)^{x \tanh x}$$

ett gränsvärde då $x \rightarrow \infty$ (använd standardgränsvärdet i uppgift 12)?

8. Räkna ut $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(5+x)/\ln(1+5x^3)$.
9. Räkna med hjälp av formeln $1 = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$ ut gränsvärdena (utnyttja fall (a) då du behandlar fall (b))

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^x - 9}{x - 2}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x3^x - 8x - 2}{x^2 - 2x}.$$

10. Vad blir $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + n} \right)^{\frac{n^2 + 1}{n+1}}$.

11. Använd bl.a. formeln $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ till att bestämma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{7n^3 + 2}{n^2 + 3n}}.$$

12. Räkna ut gränsvärdet (bl.a. med hjälp av standardformeln $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + xe^{-x})^{1/\ln(1+x)}.$$