

## Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 39

1. Vilket tal går

$$(a) \quad \sin \frac{x^3}{2} \cdot \cot 2x^3, \quad (b) \quad \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{x}{3x + \tan x}, \quad (c) \quad \frac{2x^2 + \tan x \cdot \sin x}{\tan 3x^2}$$

mot då  $x \rightarrow 0$ ?

2. Förenkla

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{2 \sin x}}{\tan x + \cot x}.$$

3. Vilket tal närmar sig kvoten  $(\arcsin(4x^3))/x^3$  då  $x \rightarrow 0$ ? (Ledning: Uttryck kvoten med hjälp av variabeln  $y = \arcsin(4x^3)$ .)

4. Ange lösningarna till den komplexa ekvationen  $(z + 5)^5 = \sqrt{3} + i$  i trigonometrisk form (dvs. med hjälp av funktionerna  $\sin$  och  $\cos$ ).

5. Vilket värde har  $\arcsin(\cos x)$  då  $\pi \leq x \leq 2\pi$ ?

6. Visa att  $\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3}$ . (Ledning: Kalla högra ledet  $x$ , varvid  $4/3 = \tan(2x)$ ; använd sedan trigonometriska formler.)

7. Räkna ut de komplexa kvadratrötterna till  $a = 2 - 3i$  utan att använda trigonometriska funktioner.

8. Verifiera att  $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

9. Visa att  $\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$ . (Ledning: Utgå från formeln för  $\cosh(2x)$ .)

10. Vad händer med uttrycket

$$\sqrt{2 + x + x^2} - \sqrt{1 + x^2}$$

då  $x \rightarrow \infty$ . (Ledning: Förläng med någonting!)

11. Avgör om funktionen  $f(x) = {}^x \log \frac{1}{2}$  eventuellt är monoton (dvs. växande eller avtagande).

12. En talföljd  $(a_n)$  är definierad genom  $a_0 = 0$  och  $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$ . Visa att om följden konvergerar mot något tal  $a$  så är med nödvändighet  $a = 1$ .

13. Låt  $f(x) = x^3$  och välj  $\varepsilon = 1/5$ . Bestäm ett tal  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x) - 1| < \varepsilon$  för  $|x - 1| < \delta$ .