

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 38

1. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow +\infty$, om

$$f(x) = \frac{\sqrt{2^{x+3}} + 3^{3 \cdot 3^{\log x}} - 4x^2 3^x}{x^{11} + 3 \cdot 3^{\log x} + 2x^2 3^x}.$$

2. Skriv uttrycket

$$\frac{{}^3\log 5 + 5 \cdot {}^5\log 9}{1 + {}^2\log e}$$

med hjälp av den *naturliga logaritmen* \ln (dvs. med hjälp av ${}^e\log$, där $e = 2,718\dots$).

3. Lös ekvationen

$$6561^x = 81(\sqrt{3})^{-2x^2}.$$

4. Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$, $x > 1$, är injektiv. Vilken är den inversa funktionen f^{-1} och vilken definitionsmängd har den?

5. Visa att om funktionen f är strängt växande så är den inversa funktionen f^{-1} också strängt växande.

6. Bevisa att ${}^{1/a}\log x = -{}^a\log x$.

7. En boll släpps mot golvet från en meters höjd. Vid varje studs förlorar den $1/10$ av sin rörelseenergi, vilket innebär att dess maximihöjd minskar i samma proportion. Hur lång sträcka har bollen totalt rört sig vid den tionde studsden?

8. Visa att $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

9. Lös ekvationerna (a) $\ln x + \ln(x-2) = 2$, (b) ${}^3\log(2^x + 2^{x+2}) = 2$.

10. För radioaktivt sönderfall gäller formeln $m(t) = m(0)e^{-\lambda t}$, där $m(t)$ är ämnets massa vid tiden t och λ är sönderfallskonstanten. Med halveringstiden T menas den tid det tar för ämnet att reducera sin massa till hälften. Bestäm sambandet mellan λ och T .

11. Lös ekvationen $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$.

12. Skriv $f(x) = 3 \sin 3x + 4 \cos 3x$ i formen $A \cos(3x + \phi)$, där A och ϕ är konstanter. Visa att $|f(x)| \leq 5$ för varje x .

13. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$, om

$$f(x) = \frac{x + \frac{2}{\sin(1/x)}}{x + \cot(1/x)}.$$