

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 37

- (a) Vi vet att talet $\sqrt{2}$ är irrationellt. Visa *med hjälp av detta* att också talet $x = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ är irrationellt. (Ledning: Visa att antagandet att det är rationellt leder till en motsägelse.)
(b) Visa att talet x är irrationellt genom att visa att x satisfierar en polynomekvation, som saknar rationella lösningar.
- Visa att $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ är irrationellt.
- Skriv talet $(2 + i)(5 + 3i)/(1 + 2i)$ på formen $a + ib$, där a och b är talets reella och imaginära delar.
- Verifiera att för operationen att bilda konjugattalet $\bar{z}$ till ett komplext tal z gäller att $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- Verifiera att för operationen $|z|$ att bilda beloppet av ett komplext tal z gäller att $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ om $z_2 \neq 0$.
- Bestäm definitionsmängden för (a) funktionen $f(x) = x + \sqrt{2x - x^2}$, (b) funktionen $g(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{-x}$.
- Bestäm kvot och rest vid divisionen $(x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 3x - 2) : (x^3 + x + 1)$.
- Bestäm alla lösningar till $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12 = 0$, både reella och komplexa. (Ledning: Försök först hitta de rationella lösningarna.)
- Visa med hjälp av triangelolikheten att kurvan

$$y = x^3 - 3x + \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$

inte når över höjden $y = 4 + 2\sqrt{2}$ och inte under $y = -4 - 2\sqrt{2}$.

- Summan av två positiva tal x och y är 4. Undersök utan att använda derivator hur stor produkten av $x + 1$ och $y - 2$ högst kan bli? (Ledn.: Använd kvadratkomplettering.)
- Antag att det är känt att formeln $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ (där $a > 0$) gäller för heltalsexponenter α och β . Verifiera att formeln gäller för alla rationella exponenter.
- Faktorisera (a) $x^5 - 81x$, och (b) $x^8 - x^7 - 128x + 128$.
- Bestäm konstanten a så att polynomet $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + a$ får faktorn $x+1$. Faktorisera sedan polynomet för detta värde på a .