

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 48

1. Räkna ut dubbelintegralen

$$\int \int_D (2x^2 + 3y^2) dx dy,$$

där D är ytstycket innanför ellipsen $2x^2 + 3y^2 = 1$.

2. Vilken area har den yta i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ och $y = \frac{2}{\pi} \arcsin x$?
3. Räkna ut längden av den *logaritmiska spiral*, som i polära koordinater har ekvationen $r = 8^{-\varphi}$, $\varphi \geq 0$.
4. (a) Beräkna arean av den yta som begränsas av *asteroiden*, dvs. av kurvan

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

(b) Räkna ut asteroidens båglängd.

5. Vilken volym har den rotationskropp, som genereras då ytstycket mellan x -axeln och kurvan $y = \cos x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, roterar kring x -axeln.
6. Räkna ut båglängden för den kurva som i polära koordinater har ekvationen $r = \sin \varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$. Vad är det här för kurva?
7. Beräkna arean hos den rotationsyta, som uppkommer då kurvan $y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0, 1]$, roterar kring x -axeln.
8. Två cirkulära, raka cylindrar med radien R har x -axeln resp. y -axeln som symmetriaxel. Tillsammans avgränsar de en kropp. Bestäm kroppens volym.
9. Räkna ut tröghetsmomentet för en boll (= fylld sfär) med radien R med avseende på en axel genom bollens medelpunkt. Densiteten anses vara konstant. Utnyttja att tröghetsmomentet för en cirkelskiva är $\frac{1}{2}mr^2$, där m är skivans massa och r är skivans radie.
10. Bestäm masscentrum för det ytstycke som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$.