

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 47

1. Derivera funktionen

$$f(x) = \int_{x^2}^{\arcsin x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

2. Visa att för $x > 0$ gäller att

$$\int_0^{\sin x} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt < \sin x.$$

3. Vilket värde har

$$\int_1^x x(\ln x)^2 dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 2 \sin x + 4}?$$

4. Räkna ut den generaliserade integralen $\int_0^3 |\ln x| dx$.

5. Härled genom partiell integration en rekursionsformel för

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

6. Räkna ut de generaliserade integralerna

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + \sin x}}.$$

7. Avgör med hjälp av jämförelsesatsen om följande generaliserade integraler är konvergenta:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x + \arctan x}, \quad \int_1^\infty x^{-x} dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx.$$

8. Räkna ut dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$$

där D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Ledning: Använd polära koordinater.

9. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 - y^2},$$

där D är den kvadrat som har hörnpunkterna $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$ och $(2, -1)$. Ledning: Inför de nya koordinaterna $u = x + y$, och $v = x - y$.

10. Räkna ut dubbelintegralen

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

där D är cirkeln kring $(0, 0)$ med radien R . Ledning: Inför polära koordinater.

11. Räkna ut trippelintegralen

$$\iiint_D dx dy dz,$$

där $D = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, genom upprepad integration.