

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 42

1. Om $f(x) = f_1(x)^{a_1} \dots f_n(x)^{a_n}$, så är $\ln |f(x)| = a_1 \ln |f_1(x)| + \dots + a_n \ln |f_n(x)|$. Genom derivering (*logaritmisk derivering*) fås (där $f(x) \neq 0$)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a_1 \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \dots + a_n \frac{f'_n(x)}{f_n(x)}.$$

Derivera funktionen $\cos^2 x \cdot \sqrt{\arccos x} / (x^2 + 1)^3$ med hjälp av denna formel.

2. Derivera funktionerna

$$x \cosh(x^2 + x), \quad \frac{e^x}{x^3 + x^2}, \quad \operatorname{arccot}(\ln(1 + e^x)), \quad \arcsin(x^{\cos x}).$$

3. Visa att $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$ för $x \in [0, 1]$ genom att studera derivatorna för bägge leden.
4. Ekvationen $\sin(tx) = x$ definierar en funktion $x(t)$ ($t > 1$) (man "löser ut" x som funktion av t). Räkna ut $x'(t)$ genom implicit derivering.
5. En tank har formen av en rät cirkulär kon med spetsen nedåt. Tankens höjd är 10 m och dess diameter längst uppe är 20 m. Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. In i tanken rinner 1 m³ bensin per sekund. Hur snabbt stiger vätskeytan vid tiden t (> 0) mätt i meter per sekund?
6. Visa att funktionen $f(x) = x - \arctan x$ är strängt växande. Räkna ut $(Df^{-1})(1 - \frac{\pi}{4})$, dvs. derivatan för den inversa funktionen för argumentet $1 - \frac{\pi}{4}$.
7. Räkna ut $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$, då

$$f(x, y) = \arctan \frac{3xy}{2x^2 + y^2}$$

8. Räkna ut derivatan (med avseende på t) av funktionen $f(\sin(t^2), \arcsin \frac{1}{t})$, där funktionen $f(x, y)$ antas ha tillräckliga egenskaper för att kedjeregeln för funktioner med flera variabler skall kunna användas.
9. Bestäm extremvärden samt globala maxima och minima till

$$f(x) = x^2 e^x.$$

10. Visa (genom att studera differensen mellan de två leden) att

$$(a) \quad 3 \arctan x + x^3 > 3x \text{ för } x > 0;$$

$$(b) \quad \ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ för } x \geq 1.$$

11. En likbent triangel omskriver en enhetscirkel (= en cirkel med radien 1). Bestäm det minsta värde som triangelns area kan ha.