

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 39

1. Vilket tal går

$$(a) \quad \frac{3x^2 + 2x^3}{\tan(2x^2) + \sin^3 x}, \quad (b) \quad \frac{3 \tan x + x}{x + \sin x}, \quad (c) \quad \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(2x)}$$

mot då $x \rightarrow 0$?

2. Förenkla

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{2 \sin x}}{\tan x + \cot x}.$$

3. Vilket tal närmar sig kvoten $(\arcsin(2\sqrt[3]{x}))/\sqrt[3]{x}$ då $x \rightarrow 0$? (Ledning: Uttryck kvoten med hjälp av variabeln $y = \arcsin(2\sqrt[3]{x})$.)

4. Lös den komplexa ekvationen $(z + 3)^4 = 1 + i\sqrt{3}$ i trigonometrisk form (dvs. med hjälp av funktionerna $\sin$ och $\cos$).

5. Vilket värde har $\arccos(\sin(2x))$ då $3\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$?

6. Visa att $\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3}$. (Ledning: Kalla högra ledet x , varvid $4/3 = \tan(2x)$; använd sedan trigonometriska formler.)

7. Räkna ut kvadratrötterna till $a = 1 - 2i$ utan att använda trigonometriska funktioner.

8. Verifiera att $\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$.

9. Visa att $\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$. (Ledning: Utgå från formeln för $\cosh(2x)$.)

10. Vad händer med uttrycket

$$\sqrt{1 + 3x^2} - \sqrt{1 + 2x + 3x^2}$$

då $x \rightarrow \infty$. (Ledning: Förläng med någonting!)

11. Avgör om funktionen $f(x) = {}^x \log \frac{1}{5}$ eventuellt är monoton (dvs. växande eller avtagande).

12. En talföljd (a_n) är definierad genom $a_0 = 10$ och $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} - 1$. Visa att följderna är strängt avtagande (dvs. att $a_{n+1} - a_n < 0$). Visa också att om följderna konvergerar mot något tal a så är med nödvändighet $a = 0$.

13. Låt $f(x) = x^4$ och välj $\varepsilon = 1/3$. Bestäm ett tal $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - 1| < \varepsilon$ för $|x - 1| < \delta$.