

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 38

1. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow +\infty$, om

$$f(x) = \frac{\sqrt{5^{x+3}} + 7^{3 \cdot 7 \log x} - 4x^2 3^x}{x^{10} + 3^5 \log x + 2x^2 3^x}.$$

2. Skriv uttrycket

$$\frac{{}^3\log 4 + 5 {}^4\log 16}{1 + {}^2\log e}$$

med hjälp av den *naturliga logaritmen* \ln (dvs. med hjälp av ${}^e\log$, där $e = 2,718\dots$).

3. Lös ekvationen

$$(\sqrt{5})^{2x} = 625 \cdot 25^{\frac{x+1}{2x}}.$$

4. Visa att funktionen $f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 - 1}$, $x > 1$, är injektiv. Vilken är den inversa funktionen f^{-1} och vilken definitionsmängd har den?

5. Visa att om funktionen f är strängt växande så är den inversa funktionen f^{-1} också strängt växande.

6. Visa (utan att använda derivator) att funktionerna (a) x^n , $x \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), och funktionen (b) $x^4 - x^2$, $x \geq 1$, är strängt växande.

7. Bevisa att ${}^{1/a}\log x = -{}^a\log x$.

8. En boll släpps mot golvet från en meters höjd. Vid varje studs förlorar den $1/10$ av sin rörelseenergi, vilket innebär att dess maximihöjd minskar i samma proportion. Hur lång sträcka har bollen totalt rört sig vid den tionde studsden?

9. Visa att om n är ett jämnt tal, så är

$$\binom{n}{0} \frac{1}{2^0} - \binom{n}{1} \frac{1}{2^1} + \dots - \binom{n}{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

10. Lös ekvationerna (a) ${}^2\log(x+1) + {}^2\log(x-2) = 2$, (b) ${}^5\log(2^x + 2^{x+3}) = 3$.

11. Visa att

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

12. Lös ekvationen $\cos 2x = 3 \sin x + 2$.

13. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow 0$, om

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - 2 \cos^2 x}{x \tan x + x^2 \cos x}.$$