

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 37

- (a) Vi vet att talet $\sqrt{2}$ är irrationellt. Visa *med hjälp av detta* att också talet $x = \sqrt{5 + \sqrt{2}}$ är irrationellt. (Ledning: Visa att antagandet att det är rationellt leder till en motsägelse.)
(b) Visa att talet x är irrationellt genom att visa att x satisfierar en polynomekvation, som saknar rationella lösningar.
- Skriv talet $(1+i)(3+2i)/(2+i)$ på formen $a+ib$, där a och b är talets reella och imaginära delar.
- Verifiera att för operationen att bilda konjugattalet $\bar{z}$ till ett komplext tal z gäller att $z_1/z_2 = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ ($z_2 \neq 0$).
- Verifiera att för operationen $|z|$ att bilda beloppet av ett komplext tal z gäller att $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- Bestäm definitionsmängden för (a) funktionen $f(x) = 2x + \sqrt{x - x^2}$, (b) funktionen $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} - \sqrt{-x}$.
- Bestäm kvot och rest vid divisionen $(x^5 + 3x^4 - x^3 + 4x - 1) : (x^2 + x + 1)$.
- Bestäm alla lösningar till $x^4 - 17x^2 - 34x - 30 = 0$, både reella och komplexa. (Ledning: Försök först hitta de rationella lösningarna.)
- Visa med hjälp av triangelolikheten att kurvan

$$y = x^3 - 3x + \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$

inte når över höjden $y = 4 + 2\sqrt{2}$ och inte under $y = -4 - 2\sqrt{2}$.

- Summan av två positiva tal x och y är 3. Undersök utan att använda derivator hur stor produkten av $x - 1$ och $y + 2$ högst kan bli? (Ledn.: Använd kvadratkomplettering.)
- Antag att det är känt att formeln $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ gäller för heltalsexponenter α och β . Verifiera att formeln gäller för alla rationella exponenter.
- Faktorisera (a) $x^5 - 81x$, och (b) $x^8 - x^7 - 128x + 128$.
- Bestäm konstanten a så att polynomet $p(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 2a$ får faktorn $x - 1$. Faktorisera sedan polynomet för detta värde på a .