

Extra övningsuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 48

(dessa uppgifter går vi inte igenom på någon demonstration)

1. Beräkna med hjälp av Guldins regel volymen av den kropp som uppkommer då ellipsskivan $4x^2 + y^2 + 8x + 2y \leq 4$ roterar kring den räta linjen $x = 2$. Ledning: Arealen av en ellipsskiva med halvaxlarna a och b är πab . Svar: $27\pi^2$.

2. Utveckla funktionen

$$\frac{e^x + x}{1 + x} \sin x$$

i Maclaurinserie av ordningen 3. Svar: $x + x^2 - (2/3)x^3 + O(x^4)$.

3. Räkna ut följande gränsvärden med hjälp av serieutvecklingar:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3 - 4x^5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 - x)}{1 - \sqrt{1 - x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x(\cos 2x - 1)}.$$

Svar: $1/6$, -1 och $-1/12$.

4. Räkna ut gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln x - \ln 2}{3x - 6} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{(\ln(\cos x))^2}{(\ln(\cot x))^2}$$

med hjälp av l'Hôpitals regel. Svar: $1/6$ och 1 .

5. Använd l'Hôpitals regel (den allmänna varianten) upprepade gånger för att bestämma gränsvärdena i uppgift 2.

6. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [n \ln(n + 1) - n \ln n - 1].$$

Svar: $-1/2$. Ledning: Ersätt n med en kontinuerlig variabel $1/x$ och låt $x \rightarrow 0^+$. Använd serieutvecklingar eller l'Hôpitals regel.

7. Räkna ut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{(\arctan x)^3}.$$

Svar: $-1/6$.