

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 47

1. Vilken är arean av den rotationsyta, som fås då kurvan $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, roterar kring x -axeln?
2. Vilken är arean av den rotationsyta som uppkommer då ellipsbågen $16x^2 + y^2 = 16$, $y \geq 0$, roterar kring x -axeln?
3. Räkna ut båglängden hos den kurva, som i parameterform ges av

$$\begin{cases} x = e^{-2t} + 2t \\ y = 4e^{-t} \end{cases}, \quad t \in [-1, 3].$$

4. Två cirkulära, raka cylindrar med radien R har x -axeln resp. y -axeln som axel. Tillsammans avgränsar de en kropp. Bestäm kroppens volym.
5. Beräkna längden av (a) den *logaritmiska spiral*, som i polära koordinater har ekvationen $r = e^{-2\varphi}$, $\varphi \geq 0$, (b) den *kardiod*, som har ekvationen $r = 2a(1 - \cos \varphi)$.
6. Antag att massfördelningen hos en kvadrat med sidan a är likformig (dvs. antag att ytdensiteten är konstant). Visa att tröghetsmomentet med avseende på en axel vinkelrätt mot kvadratens mitt är $\frac{1}{6}ma^2$, då m betecknar hela massan.
7. Räkna ut tröghetsmomentet hos en boll (= fylld sfär) med avseende på en axel genom bollens centrum. Densiteten antas vara konstant. Utnyttja att tröghetsmomentet hos en cirkelskiva är $(1/2)mr^2$, där r är skivans radie och m är skivans massa.
8. Bestäm tyngdpunkten för det ytstycke som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = \arccos x$, $x \in [0, 1]$. Ytdensiteten antas vara konstant.
9. Är följande serier konvergenta? Jämför med kända serier eller använd integralkriteriet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 2n\sqrt{3}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{3} - n^{-\sqrt{3}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}.$$

10. Utveckla nedanstående funktioner i Maclaurinserie genom att utnyttja formeln för summan av en geometrisk serie och standardutvecklingar

$$x^2/(3-x), \quad \ln(3+x^2), \quad \sqrt{x} \arctan(x\sqrt{x}).$$

11. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordningen 4 (dvs. Taylorpolynomet av ordningen 4 kring 0) för funktionerna

$$e^x \sin \frac{x}{3}, \quad (x^3 + 1)e^{3x}$$

genom att använda standardutvecklingar.