

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 46

1. Derivera funktionen

$$f(x) = \int_{1/(x+1)}^{x^3} \frac{t}{\sin t} dt \quad (x > -1).$$

2. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2 x} \int_0^{\sin x} \frac{\sin^2 t}{e^{t^2} - 1} dt$$

med hjälp av integralkalkylens medelvärdessats.

3. Vilka värden har

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 6} dx.$$

4. Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^2 |\ln x| dx$.

5. Härled med hjälp av partiell integration en rekursionsformel för

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

6. Avgör med hjälp av jämförelsesatsen om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x + \tanh x}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^3 + \arctan x}, \quad \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x} - x} dx.$$

7. Räkna ut dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x}{x+2y} dx dy,$$

där D är den rektangel som begränsas av de räta linjerna $x+2y=1$, $x+2y=2$, $2x-y=0$ och $2x-y=2$. Ledning: Inför nya variabler som är anpassade efter begränsningslinjerna.

8. Räkna ut dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy,$$

där D är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Ledning: Använd polära koordinater.

9. Vilken är arean av den yta i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ och $y = \frac{2}{\pi} \arcsin x$?

10. Vilken area har den yta som begränsas av *asteroiden*, dvs. av kurvan $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$?

11. Beräkna volymen hos den kropp som genereras då ytstycket mellan x -axeln och kurvan $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, roterar kring x -axeln.

12. Räkna ut båglängden hos kurvan

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, \quad x \in [1, 2].$$