Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 43

1. Om $f(x) = f_1(x)^{a_1} \cdots f_n(x)^{a_n}$, så är $\ln|f(x)| = a_1 \ln|f_1(x)| + \cdots + a_n \ln|f_n(x)|$. Genom derivering (*logaritmisk derivering*) fås (där $f(x) \neq 0$)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a_1 \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + a_n \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \,.$$

Derivera funktionen $(x+2)^3 \cdot (\tan x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\arctan x}}$ med hjälp av denna formel för logaritmisk derivering.

2. Derivera funktionerna

$$\sinh((\ln x)^x), \qquad x^2 \arcsin \frac{1}{x} \,.$$

3. Ekvationen $y + \cos(x - y^3) = 1$ definierar en funktion $y(x)$ vilkens graf går genom origo. Räkna ut derivatan $y'(x)$, speciellt $y'(0)$, genom implicit derivering.

4. En 5 m lång stege lutar mot en vägg. Stegens nedre ända rör sig från väggen med en hastighet av 1 m/s. Hur snabbt faller stegens övre ända då den nedre ändan befinner sig 2 m från väggen?

5. Räkna ut $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$, då $f(x, y) = \arccos(xy/(x^2 + y^2))$.

6. Visa genom att jämföra derivatorna för de bägge leden, att

$$2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$$

för $x \in [0, 1]$.

7. Räkna ut derivatan (med avseende på t) av funktionen $f(\ln(1+t^2), \arcsin(1/t))$ (funktionen $f(x, y)$ antas ha tillräckliga egenskaper för att kedjeregeln för funktioner med flera variabler skall kunna användas).

8. Bestäm extremvärden samt globala maxima och minima till

$$f(x) = x^2 e^x \,.$$

9. Visa (genom att studera differensen mellan de bägge leden) att

   (*a*) $3 \arctan x + x^3 > 3x$ för $x > 0$;

   (*b*) $\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ för $x \geq 1$.

10. En likbent triangel omskriver en enhetscirkel (= en cirkel med radien 1). Bestäm det minsta värde som triangelns area kan ha.

11. Bestäm alla primitiver till funktionerna

$$x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \qquad \frac{1 + x^3 - x \sin x}{x}, \qquad \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}, \qquad \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} \,.$$