Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 42

1. Bestäm $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x\cot^3 x}$.

2. Vilka asymptoter har kurvan
$$y = \frac{x^3+2x^2+7x-1}{x^2-1}.$$

3. Räkna ut gränsvärdet ($\exp t$ är detsamma som e^t)
$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=2}^{p} n(\sqrt[n]{k}-1)\right).$$

4. Vilket gränsvärde kan den rekursiva talföljd, som är definierad genom $a_0 = 5$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, eventuellt ha?

5. För vilka x konvergerar serien
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$$
och vad är i dessa fall seriens summa?

6. Är serien
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$$
konvergent och vad är i så fall seriens summa?

7. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att polynomet $f(x) = x^3-2x^2+x-1$ har (åtminstone) ett positivt nollställe och inget negativt nollställe.

8. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att för varje kontinuerlig funktion f med $D_f = [0,1] \supseteq V_f$ har ekvationen $f(x) = x$ en lösning (en så kallad *fixpunkt* till f). Ledning: Tillämpa satsen på funktionen $f(x) - x$.

9. Visa att följande serie är konvergent och att dess summa är mindre än eller lika med 3:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+2}\cos\frac{1}{n^2}.$$

10. Derivera funktionerna
$$1/\tan(e^x), \qquad \ln(|x|\arctan x), \qquad 2^{\arcsin\sqrt{x}}.$$

11. För vilka värden på a och b är funktionen
$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{, för } x<1 \\ \sin(x^2+1) & \text{, för } x\geq 1 \end{cases}$$
(i) kontinuerlig, (ii) deriverbar?

12. En tank har formen av en rät cirkulär kon med spetsen nedåt. Tankens höjd är 10 m och dess diameter högst uppe är 20 m. Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. In i tanken rinner 1 m^3 bensin per sekund. Hur snabbt stiger vätskeytan vid tiden t ($t > 0$) mätt i meter per sekund?