

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 42

1. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x \cot^3 x}$.

2. Vilka asymptoter har kurvan

$$y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 1}{x^2 - 1}.$$

3. Räkna ut gränsvärdet ($\exp t$ är detsamma som e^t)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=2}^p n(\sqrt[n]{k} - 1) \right).$$

4. Vilket gränsvärde kan den rekursiva talföljd, som är definierad genom $a_0 = 5$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$, eventuellt ha?

5. För vilka x konvergerar serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^n$$

och vad är i dessa fall seriens summa?

6. Är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$$

konvergent och vad är i så fall seriens summa?

7. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att polynomet $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ har (åtminstone) ett positivt nollställe och inget negativt nollställe.

8. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att för varje kontinuerlig funktion f med $D_f = [0, 1] \supseteq V_f$ har ekvationen $f(x) = x$ en lösning (en så kallad *fixpunkt* till f).
Ledning: Tillämpa satsen på funktionen $f(x) - x$.

9. Visa att följande serie är konvergent och att dess summa är mindre än eller lika med 3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 2} \cos \frac{1}{n^2}.$$

10. Derivera funktionerna

$$1/\tan(e^x), \quad \ln(|x| \arctan x), \quad 2^{\arcsin \sqrt{x}}.$$

11. För vilka värden på a och b är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{ för } x < 1 \\ \sin(x^2 + 1) & , \text{ för } x \geq 1 \end{cases}$$

(i) kontinuerlig, (ii) deriverbar?

12. En tank har formen av en rät cirkulär kon med spetsen nedåt. Tankens höjd är 10 m och dess diameter högst uppe är 20 m. Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. In i tanken rinner 1 m³ bensin per sekund. Hur snabbt stiger vätskeytan vid tiden t ($t > 0$) mätt i meter per sekund?