

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 41

1. Visa med hjälp av formeln $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ att funktionen $\sin x$ är kontinuerlig. Ledning: Visa att $|\sin x - \sin a| \rightarrow 0$ då $x \rightarrow a$.

2. Räkna ut gränsvärdena med hjälp av $1 = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$ (använd fall (a) i (b)):

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2^x-2}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x2^x-2}{2^{2x}-2^{x+1}}.$$

3. Räkna med hjälp av $1 = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \ln(1+x)$ ut

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x^2 \ln x}{x \ln x}.$$

4. Bestäm följande gränsvärde om det existerar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \sqrt{x} + 2x \cos \sqrt{x}}{\tan x + x\sqrt{x}}.$$

5. Vad är $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^4-n}{3n^4+1} \right)^{\frac{2n^4+3}{n-1}}$?

6. Har följande funktion ett gränsvärde då $x \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \frac{x + (2/\sin^3 \frac{1}{x})}{2x + x^3 \arctan x + 3x^3}.$$

7. Räkna ut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \sinh x}{2 \sin x \ln(1+x) + 3x^2}.$$

8. Vad blir

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(3x)}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(5+x^2)}{\ln(4+3x)}?$$

9. Vi vet att t.ex. x "vinner" över $\ln x$ då $x \rightarrow \infty$. "Vinner" $\sqrt[8]{x}$ över $(\ln x)^8$, dvs. vad blir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^8}{\sqrt[8]{x}}?$$

10. Bestäm med hjälp av bl.a. formeln $e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}$ gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cosh x - x \cos x)^{1/(e^x-1)}.$$

11. Använd bl.a. formeln $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ till att bestämma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+2}{n^3+n+3} \right)^{\frac{n}{n^3-1}}.$$

12. Vilket värde har $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{n-3}^{1/(n+1)}$?

13. Bestäm asymptoterna till kurvan $y = xe^{-1/x}$.