

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 40

1. Vilket tal går

$$(a) \frac{x^3 + x^4}{\tan(x^3/2)}, \quad (b) \frac{3x + \tan x}{x + 2 \sin x}, \quad (c) \frac{1 - \cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$

mot då $x \rightarrow 0$?

2. Förenkla med hjälp av trigonometriska formler uttrycket

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{2 \sin x}}{\tan x + \cot x}.$$

3. Vilket tal närmar sig kvoten $\arcsin(3\sqrt{x})/\sqrt{x}$ då $x \rightarrow 0^+$? (Ledning: Uttryck kvoten med hjälp av variabeln $y = \arcsin(3\sqrt{x})$.)
4. Lös den komplexa ekvationen $(z+1)^4 = 1 + i\sqrt{3}$ med hjälp av trigonometriska funktioner.
5. Vilket värde har $\arccos(\sin x)$ då $3\pi/2 \leq x \leq 5\pi/2$?
6. Visa att $\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3}$. (Ledning: Kalla högra ledet x , varvid $4/3 = \tan(2x)$; använd sedan trigonometriska formler.)
7. Räkna ut kvadratrötterna till $a = 1 + 2i$ utan att använda trigonometriska funktioner.
8. Verifiera att $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.
9. Visa genom att använda formeln för $\cosh(2x)$ att $\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$.
10. Undersök gränsvärdet (dvs. bestäm dess värde om det existerar)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + 2x^2} - \sqrt{1 + x + 2x^2} \right).$$

(Ledning: Förläng med någonting!)

11. Avgör om funktionen $f(x) = x \log \frac{1}{2}$ eventuellt är monoton (dvs. växande eller avtagande).
12. En talföljd (a_n) är definierad genom $a_0 = 10$ och $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} - 1$. Visa att följderna är strängt avtagande (dvs. att $a_{n+1} < a_n$). Visa också att om följderna konvergerar mot något tal a så är $a = 1$.
13. Sätt $f(x) = x^4$ och välj $\varepsilon = 1/2$. Bestäm ett tal $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - 1| < \varepsilon$ för $|x - 1| < \delta$.