

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 39

1. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$, om

$$f(x) = \frac{\sqrt{5^{x+3}} + 2^{3 \cdot 2 \log x} - x 3^x}{x^{19} + 2 \cdot 7 \log x + 2x 3^x}?$$

2. Skriv uttrycket

$$\frac{{}^5\log 3 + 3 {}^3\log 9}{1 + {}^5\log e}$$

med hjälp av den *naturliga logaritmen* $\ln$ (dvs. med hjälp av ${}^e\log$, där $e = 2,718\dots$).

3. Lös ekvationen

$$(\sqrt{5})^{2x} = 3125 \cdot 25^{1/x}.$$

4. Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$, $x > 2$, är injektiv. Vilken är den inversa funktionen f^{-1} och vilken definitionsmängd har den?

5. Visa (utan att använda derivator) att funktionen (a) x^n , $x \geq 0$, ($n = 1, 2, \dots$) och (b) $f(x) = x^3 - x^2$, $x \geq 1$, är strängt växande.

6. Bevisa att ${}^a\log x + {}^{1/a}\log x = 0$.

7. En boll släpps mot golvet från en meters höjd. Vid varje studs förlorar den $1/10$ av sin rörelseenergi, vilket innebär att dess maximihöjd minskar i samma proportion. Hur lång sträcka har bollen totalt rört sig vid den tionde studsens?

8. Visa att $\frac{1}{2} \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} \right] = 2^{n-1} - 1$.

9. Lös ekvationen (a) ${}^2\log(x+2) - {}^2\log(x-1) = 1$, (b) ${}^5\log(4^x + 4^{x+2}) = 2$.

10. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$ om

$$f(x) = (x^3 \log x + 3x^5 + 5^x) / (2 \cdot 5^x + 3x^2 + {}^5\log x)?$$

11. En funktion f , definierad på ett intervall I och sådan att $f(x) \in I$ för varje $x \in I$, sägs vara en *involution* på I om $(f \circ f)(x) = x$ för varje $x \in I$.

(a) Visa att varje involution är injektiv. Vilken är värdemängden?

(b) Verifiera att $f_1(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ och $f_2(x) = 1 - \sqrt[3]{1-(1-x)^3}$ är involutioner på $[0, 1]$.

12. Skriv $f(x) = \sin 3x + 2 \cos 3x$ i formen $A \sin(3x + \phi)$, där A och ϕ är konstanter. Visa att $|f(x)| \leq \sqrt{5}$ för varje x .

13. Lös ekvationen $\cos 2x = 3 \sin x + 2 = 0$.

14. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$, om

$$f(x) = \frac{x^2 \sin^2(1/x) + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x} + 2x \cot(1/x)}?$$