

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 38

1. Vi vet att talet $\sqrt{2}$ är irrationellt. Visa med hjälp av detta att också $5 + \sqrt{5 + \sqrt{2}}$ är ett irrationellt tal. (Ledn.: Visa att antagandet att det är rationellt leder till att $\sqrt{2}$ är rationellt.)
2. Visa att $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ är irrationellt genom att visa att antagandet att det har ett rationellt värde r leder till en motsägelse. (Ledn. 1: Detta antagande leder nämligen till att också $r^{-1} = (1/3)(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ är rationellt. Lös ut $\sqrt{2}$ ur ett ekvationssystem och dra slutsatser. ELLER: Ledn. 2: Visa att $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ är en rot till en ekvation, som saknar rationella lösningar.)
3. Skriv talet $(1+i)(5+3i)/(2+i)$ i formen $a+ib$, där a och b är talets reella och imaginära delar.
4. Verifiera att för operationen att bilda konjugattalet \bar{z} till ett komplext tal z gäller att $z_1/z_2 = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.
5. Verifiera att för operationen $|z|$ att bilda beloppet av ett komplext tal z gäller att $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
6. Bestäm definitionsmängden för (a) funktionen $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4x}$, (b) funktionen $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} - \sqrt{-x}$.
7. Bestäm alla rationella lösningar till ekvationen $x^4 - 17x^2 - 34x - 30 = 0$.
8. Visa med hjälp av triangelolikheten att kurvan
$$y = x^3 - 3x + \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$
inte når över höjden $y = 4 + 2\sqrt{2}$ och inte under $y = -4 - 2\sqrt{2}$.
9. Bestäm kvot och rest vid divisionen $(x^7 + x^4 - 4x^3 + x + 2) : (x^4 + 2x^2 + 1)$.
10. Summan av två positiva tal x och y är 3. Undersök utan att använda derivator hur stor produkten av $x - 1$ och $y + 2$ högst kan bli.
11. Antag att det är känt att formeln $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ gäller för heltalsexponenter α och β . Verifiera att formeln gäller för alla rationella exponenter.
12. Faktorisera (a) $x^5 - 81x$, och (b) $x^8 - x^7 - 128x + 128$.
13. Bestäm konstanten a så att polynomet $p(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 2a$ får faktorn $x - 1$. Faktorisera sedan polynomet för detta värde på a .
14. Vilka asymptoter har kurvan
$$y = \frac{x^4 + x^3 + 2x}{x^3 + 1} ?$$

Skissera den!