

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 46

1. Beräkna volymen och arean av den kropp som uppkommer då ytstycket mellan x -axeln och kurvan $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, roterar kring x -axeln.
2. Vilken är arean av den rotationsyta som uppkommer då ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$ roterar kring x -axeln?
3. Räkna ut båglängden hos kurvan

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x, \quad x \in [1, 2].$$

4. Två cirkulära, raka cylindrar med radien R har x -axeln resp. y -axeln som axel. Tillsammans avgränsar de en kropp. Bestäm kroppens volym.
5. Beräkna längden av den logaritmiska spiral, som i polära koordinater har ekvationen $r = e^{-3\varphi}$, $\varphi \geq 0$.
6. Antag att massfördelningen hos en kvadrat med sidan a är likformig (dvs. antag att ytdensiteten är konstant). Visa att tröghetsmomentet med avseende på en axel vinkelrätt mot kvadratens mitt är $\frac{1}{6}ma^2$, då m betecknar hela massan.
7. Räkna ut tröghetsmomentet hos en rät cirkulär kon med avseende på konens symmetri-axel. Densiteten antas vara konstant. Utnyttja att tröghetsmomentet hos en cirkelskiva är $(1/2)mr^2$, där r är skivans radie och m är skivans massa.
8. Bestäm tyngdpunkten för det ytstycke som består av alla (x, y) för vilka $0 \leq x \leq \pi/2$ och $0 \leq y \leq \sin x$. Ytdensiteten antas vara konstant.
9. Är följande serier konvergenta? Jämför med kända serier eller använd integralkriteriet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4} + 1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4} - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}.$$

10. Utveckla nedanstående funktioner i Maclaurinserie genom att utnyttja formeln för summan av en geometrisk serie och standardutvecklingar

$$x^3/(3-x), \quad \ln(3+x^2), \quad \arctan(x^2).$$

11. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordningen 4 (dvs. Taylorpolynomet av ordningen 4 kring 0) för funktionerna

$$e^x \cos \frac{x}{2}, \quad (x^3 + 1)e^{-x}$$

genom att använda standardutvecklingar.