

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 45

1. Derivera funktionen

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+1} e^{-t^2} \sin t \, dt \quad (x > 0).$$

2. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{\sin x} \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt$$

med hjälp av integralkalkylens medelvärdessats.

3. Vilka värden har

$$\int_1^e x(\ln x)^2 \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x + 4 \sin x + 6} \, dx.$$

4. Beräkna $\int_0^{2\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx$.

5. Härled med hjälp av partiell integration en rekursionsformel för

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

6. Vilka värden har följande generaliserade integraler (om de är konvergenta)

$$\int_1^\infty \frac{\ln(2x-1)}{x^2} \, dx, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2-1}?$$

7. Avgör med hjälp av jämförelsesatsen om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x + \arctan x}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \arctan x}.$$

8. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{1+x^2+y^2}$$

där D är den mängd som begränsas av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Ledning: Inför polära koordinater.

9. Räkna ut dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{x^2 - y^2}$$

där D är den kvadrat som har hörnpunkterna $(1,0)$, $(3,0)$, $(2,1)$ och $(2,-1)$. Ledning: Använd de nya variablerna $u = x + y$ och $v = x - y$.

10. Vilken är arean av den yta i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$.

11. Vilken area har den yta som begränsas av *asteroiden*, dvs. av kurvan $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

12. Beräkna volymen hos den kropp som uppkommer då ytstycket mellan x -axeln, y -axeln och kurvan $y = \cos x$ roterar kring y -axeln.