Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 42

1. Om $f(x) = f_1(x)^{a_1} \cdots f_n(x)^{a_n}$, så är $\ln|f(x)| = a_1 \ln|f_1(x)| + \cdots + a_n \ln|f_n(x)|$. Genom derivering (*logaritmisk derivering*) fås (där $f(x) \neq 0$)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a_1 \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + a_n \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} .$$

Derivera funktionen $x^5 \cdot (\ln x)^2 \cdot \sin x \cdot (\arcsin x)^7$ genom logaritmisk derivering.

2. Derivera funktionerna

$$\arctan(x^{\ln x}), \qquad \operatorname{arccot} \frac{1+x^2}{1-x^2} .$$

3. För vilka värden på a och b är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{för } x < 1 \\ \ln(x + \sqrt{x}) & , \text{för } x \geq 1 \end{cases}$$

(i) kontinuerlig, (ii) deriverbar?

4. Antag att funktionen $x(t)$ $(t > 1)$är implicit definierad av ekvationen $\sin(tx) = x$. Beräkna $x'(t)$ genom implicit derivering.

5. En 5 m lång stege lutar mot en vägg. Stegens nedre ända rör sig från väggen med en hastighet av 1 m/s. Hur snabbt faller stegens övre ända då den nedre ändan befinner sig 2 m från väggen?

6. Funktionen f är strängt växande och deriverbar för $x > 0$. Dessutom vet vi att $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 3$ och $f'(2) = 5$. Är f^{-1} deriverbar i punkten 2? Ange i så fall derivatan!

7. Beräkna $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$, då $f(x, y) = \arctan(xy/(x^2 + y^2))$.

8. Räkna ut derivatan (med avseende på t) av funktionen $f(\sin(t^2), \arccos(t^{-1}))$ då funktionen $f(x, y)$ antas ha tillräckliga egenskaper för att kedjeregeln för funktioner med flera variabler skall kunna användas.

9. Bestäm extremvärden samt globala maxima och minima till

$$f(x) = x^2 e^x .$$

10. Visa (genom att studera differensen mellan de bägge leden) att

    (a) $2 \ln x > 4x - x^2 - 3$ för $x > 1$,

    (b) $\arctan x < \frac{3x + x^3}{3 + 2x^2}$ för $x > 0$.

11. En fabrik vill minimera materialåtgången vid tillverkning av en konservburk med volymen 1 dm^3. Vilka proportioner bör burken ha?