

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 41

1. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$.

2. Vilka asymptoterna har kurvan

$$y = \frac{2x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}.$$

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=2}^p n(\sqrt[n]{k} - 1) \right).$$

4. Vilket gränsvärde kan den rekursiva talföljd, som är definierad genom $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}$, eventuellt ha?

5. För vilka x konvergerar serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n$$

och vad är då seriens summa?

6. Är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergent och vad är i så fall seriens summa?

7. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{n}{n-3}}.$$

8. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att polynomet $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ har (åtminstone) ett positivt nollställe och inget negativt nollställe.

9. Visa med hjälp av ovannämnda sats (uppg. 8) att för varje kontinuerlig funktion f med $D_f = [0, 1] = V_f$ har ekvationen $f(x) = x$ en lösning (en så kallad fixpunkt till f).
Ledning: Tillämpa satsen på funktionen $f(x) - x$.

10. Visa att följande serie är konvergent och att dess summa är mindre än eller likamed 2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1},$$

11. Derivera funktionerna

$$e^{\frac{1}{\tan x}}, \quad \ln(1 + x \sin x), \quad \cos^2(x|x|).$$

12. En tank har formen av en rät cirkulär kon med spetsen nedåt. Tankens höjd är 10 m och dess diameter högst uppe är 20 m. Vid tiden $t = 0$ är tanken tom. In i tanken rinner 1 m³ bensin per sekund. Hur snabbt stiger vätskeytan vid tiden t ($t > 0$) mätt i meter per sekund?