

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 40

1. Avgör om funktionen $f(x) = x \log \frac{2}{5}$ eventuellt är monoton (dvs. växande eller avtagande).
2. En talföljd definieras av $a_0 = 10, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 2} + 3$. Visa att följden är strängt avtagande (dvs. att $a_{n+1} < a_n$) genom att studera differensen $a_{n+1} - a_n$.
3. Visa med hjälp av formeln $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ att $\cos x \rightarrow \cos 2$, då $x \rightarrow 2$. Bestäm ett sådant värde på δ att $|x - 2| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos 2| < 0,02$.
4. Bestäm följande gränsvärde om det existerar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \tan^2 \sqrt{x}}{x + x\sqrt{x}}.$$

5. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x + 1 \right).$$

6. Har följande funktion ett gränsvärde då $x \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \frac{x + x^3 \tanh x + 3x^3}{x + (1/\sin^3 \frac{1}{x})}?$$

7. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sinh x}{\sinh x \ln(1+x) + x^2}.$$

8. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + 2x^2)/\ln(1 + x^2)$.

9. Vi vet att t.ex. $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, då $x \rightarrow \infty$. Hur är det månne med

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^5}{\sqrt{x}}?$$

10. Bestäm med hjälp av formeln $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n + 2}{2n^2 + 1} \right)^{\frac{n^2+1}{n+1}}.$$

11. Använd formeln $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ till att beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 3n + 2}{5n - 2}}.$$

12. Vilket värde har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n+\sqrt{n}}?$$

13. Bestäm asymptoterna till kurvan $y = xe^{-1/x}$.