

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 39

1. Vilket tal går

$$(a) \quad \sin \frac{x}{2} \cdot \cot x, \quad (b) \quad \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x}{x + \tan x}, \quad (c) \quad \frac{x}{\tan 3x}$$

mot då $x \rightarrow \infty$?

2. Förenkla med hjälp av trigonometriska formler uttrycket

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{2 \sin x}}{\tan x + \cot x}.$$

3. Vilket tal närmar sig kvoten $\arcsin(2x)/x$ då $x \rightarrow 0$? (Ledning: Uttryck kvoten med hjälp av variabeln $y = \arcsin(2x)$.)

4. Skriv rötterna till ekvationen $(z + 3)^5 = 1 + i\sqrt{3}$ i trigonometrisk form (dvs. med hjälp av funktionerna $\sin$ och $\cos$).

5. Vilket värde har $\arcsin(\sin x)$ och $\arcsin(\cos x)$ då $\pi \leq x \leq 2\pi$?

6. Visa att $\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3}$. (Ledning: Kalla högra ledet x , varvid $4/3 = \tan(2x)$; använd sedan trigonometriska formler.)

7. Beräkna kvadratrötterna ur $a = 3 + 2i$ genom att lösa u och v ur ekvationen $(u + iv)^2 = a$.

8. Visa att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

9. Visa genom att använda formeln för $\cosh(2x)$ att $\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$.

10. Undersök gränsvärdet (dvs. bestäm dess värde om det existerar)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x} - 1 - x).$$

(Ledning: Förläng med någonting!)

11. Verifiera att

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

12. En talföljd (a_n) är definierad genom $a_0 = 0$ och $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$. Visa att om följden konvergerar mot något tal a så är med nödvändighet $a = 1$.