

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 38

1. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$, om

$$f(x) = \frac{\sqrt{2^{x+3}} + 3^{3 \cdot 3^{\log x}} + 3x^2 3^x}{x^{77} + 3^{\log x} + 2x^2 3^x}.$$

2. Skriv uttrycket

$$\frac{{}^5\log 2 + 5 {}^6\log 3}{1 + {}^3\log e}$$

med hjälp av den *naturliga logaritmen* \ln (vilken är densamma som $e \log$, där $e = 2,718\dots$).

3. Lös ekvationen

$$3125^x \cdot (\sqrt{5})^{2x^2} = 25.$$

4. Visa att funktionen $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2}$, $x > 0$, är injektiv. Vilken är den inversa funktionen f^{-1} och vilken definitionsmängd har den?
5. Visa (utan att använda derivator) att funktionen $f(x) = x^3 - x^2$, $x \geq 1$, är strängt växande.
6. Bevisa att ${}^a\log x + {}^{1/a}\log x = 0$. Övn. 1.25
7. En boll släpps mot golvet från en meters höjd. Vid varje studs förlorar den $1/10$ av sin rörelseenergi, vilket innebär att dess maximihöjd minskar i samma proportion. Hur lång sträcka har bollen totalt rört sig vid den tionde studsens?
8. Visa att om n är ett jämnt tal så är

$$\binom{n}{0} \frac{1}{2^0} - \binom{n}{1} \frac{1}{2^1} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

9. Lös ekvationen ${}^3\log(2^x + 2^{x+1}) = 2$.
10. För radioaktivt sönderfall gäller formeln $m(t) = m(0)e^{-\lambda t}$, där $m(t)$ är ämnets massa vid tiden t och λ är sönderfallskonstanten. Med halveringstiden T menas den tid det tar för ämnet att reducera sin massa till hälften. Bestäm sambandet mellan λ och T .
11. En funktion f , definierad på ett intervall I och sådan att $f(x) \in I$ för varje $x \in I$ sägs vara en *involution* på I om $(f \circ f)(x) = x$ för varje $x \in I$.
- (a) Visa att varje involution är injektiv. Vilken är värdemängden?
- (b) Verifiera att $f_1(x) = (1-x)/(1+x)$ och $f_2(x) = \sqrt[4]{1-x^4}$ är involutioner på $[0, 1]$.
12. Skriv $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$ i formen $A \cos(2x + \phi)$, där A och ϕ är konstanter. Visa att $|f(x)| \leq \sqrt{5}$ för varje x .
13. Lös ekvationen $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$.
14. Vad händer med funktionsvärdet $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$, om

$$f(x) = \frac{\cot(1/x) + x}{x + x^3 \sin^2(1/x)}.$$