

Hemuppgifter i Grundkurs i analys till vecka 37

1. Vi vet att talet $\sqrt{2}$ är irrationellt. Visa *med hjälp av detta* att också $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ är ett irrationellt tal. (Ledn.: Visa att antagandet att det är rationellt leder till en motsägelse.)
2. Visa att $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ är irrationellt genom att visa att antagandet att det har ett rationellt värde r leder till en motsägelse. (Ledn.: Detta antagande leder nämligen till att också $r^{-1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ är rationellt. Lös ut $\sqrt{2}$ ur ett ekvationssystem och dra slutsatser.)
3. Skriv talet $(1+i)(5+3i)/(2+i)$ på formen $a+ib$, där a och b är talets reella och imaginära delar.
4. Verifiera att för operationen att bilda konjugattalet $\bar{z}$ till ett komplext tal z gäller att $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
5. Verifiera att för operationen $|z|$ att bilda beloppet av ett komplext tal z gäller att $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ om $z_2 \neq 0$.
6. Bestäm definitionsmängden för (a) funktionen $f(x) = x + \sqrt{x-x^2}$, (b) funktionen $g(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-2x}$.
7. Lös ekvationen $x^5+x^4-5x^3-5x^2+6x+6=0$. (Ledn.: Försök först hitta heltalslösningar.)
8. Visa med hjälp av triangelolikheten att kurvan

$$y = x^3 - 3x + \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$$

inte når över höjden $y = 4 + 2\sqrt{2}$ och inte under $y = -4 - 2\sqrt{2}$.

9. Bestäm kvot och rest vid divisionen $(x^5 + x^4 - 4x^3 + 3x + 2) : (x^3 + 2x + 1)$.
10. Summan av två positiva tal x och y är 4. Undersök utan att använda derivator hur stor produkten av $x+1$ och $y-2$ högst kan bli?
11. Antag att det är känt att formeln $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ gäller för heltalsexponenter α och β . Verifiera att formeln gäller för alla rationella exponenter.
12. Faktorisera (a) $x^5 - 81x$, och (b) $x^8 - x^7 - 128x + 128$.
13. Bestäm konstanten a så att polynomet $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + a$ får faktorn $x+1$. Faktorisera sedan polynomet för detta värde på a .
14. Verifiera formeln $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ för $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$.