Fourierserier. 25.5.2012

Uppgift 5 på baksidan. (English version on the second sheet).

1. Definiera följande begrepp:

   a) Fouriertransformen av en periodisk funktion $f \in L^1(T)$, där T betecknar intervallet $[0,1)$. Ge också formeln för den inversa transformen. Vilka tilläggsvillkor bör ställas på f och dess fourierkoefficienter för att fourierserien för f skall konvergera likformigt mot f på intervallet T?

   b) Fouriertransformen av en funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$, där $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Ge också formeln för den inversa transformen.

   c) Den (periodiska) diskreta fouriertransformen i Π_N, där Π_N är mängden av alla periodiska följder med perioden N. Ge också formeln för den inversa transformen.

2. a) Beräkna fourierkoefficienterna för den periodiska funktion $f \in L^1(T)$, (med period 1), vars restriktion till intervallet $[-1/2, 1/2)$ ges av

$$f(t) = \cos(2\pi x t), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

   b) Utnyttja resultatet från del a) för att etablera summeringsformeln

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - n^2)^2} = \frac{2\pi^2 x + \pi \sin(2\pi x)}{4x^3 \sin^2(\pi x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

3. Antag att funktionen $f \in L^1(T)$ och bevisa Riemann-Lebesgues Lemma: $\lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}(n) = 0$. Här betecknar $\hat{f}(n)$ den n:te fourierkoefficienten för f. Om du bevisar lemmat under antagandet att $f \in C^1(T)$, vilket innebär att f har en kontinuerlig derivata, (som också är periodisk med perioden 1), så är uppgiften värd 3p.

4. Redogör kortfattat, utan bevis och härledningar, om följande: Hur kan den (periodiska) diskreta fouriertransform i Π_N användas för att erhålla approximationer $\widehat{F}(m)$ av fourierkoefficienterna $\hat{f}(m)$ för en periodisk och kontinuerlig funktion $f \in C(T)$? Vilken roll spelar den snabba fouriertransformen (FFT) i denna process? Om vi dessutom antar att $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ är konvergent, hur kan vi uttrycka felet $\widehat{F}(m) - \hat{f}(m)$ med hjälp av de exakta fourierkoefficienterna $\hat{f}(k)$?

5. Definiera funktionerna f och g tillhörande $L^1(\mathbb{R})$ genom

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{om } |t| \le 1, \\ 0, & \text{om } |t| > 1, \end{cases} \quad \text{och} \quad g(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| \le 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$$

   Visa att $f = g \star g$, (där $\star$ betecknar faltning (konvolution) i $L^1(\mathbb{R})$), och använd detta till godo för att beräkna fouriertransformen av f.

Fourier Series. 25.5.2012

Turn page for assignment 5. (Även svensk version tillgänglig).

1. Give the definition of the following concepts:

   a) The Fourier transform of a periodic function $f \in L^1(T)$, where T is the interval [0,1). Give also the formula for the inverse transform. Under which additional assumptions on f and its Fourier coefficients can vi guarantee uniform convergence to f of the Fourier series of f?

   b) The Fourier transform of a function $f \in L^1(\mathbb{R})$, where $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Give also the formula for the inverse transform.

   c) The (periodic) discrete Fourier transform in Π_N, where Π_N is the set of all periodic sequences with period N. Give also the formula for the inverse transform.

2. a) Compute the Fourier coefficients of the periodic function $f \in L^1(T)$ with period 1, whose restriction to the interval $[-1/2, 1/2)$ is given by

$$f(t) = \cos(2\pi x t), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

   b) Use the result from part a) to establish the summation formula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - n^2)^2} = \frac{2\pi^2 x + \sin(2\pi x)}{4x^3 \sin^2(\pi x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

3. Suppose that $f \in L^1(T)$ and prove the Riemann-Lebesgue Lemma: $\lim_{n \to \pm\infty} \hat{f}(n) = 0$. Here $\hat{f}(n)$ is the n:th Fourier coefficient of f. If you prove the lemma assuming that $f \in C^1(T)$, that is assuming that f has a continuous derivative, (which is also periodic with period 1), the assignment is worth 3p.

4. Give a short description, without proofs and deductions, of the following: How can the (periodic) discrete Fourier transform in Π_N be used to obtain approximations $\widehat{F}(m)$ of the Fourier coefficients $\hat{f}(m)$ of a periodic and continuous function $f \in C(T)$? What is the role of the fast Fourier transform (FFT) in this process? If we further assume that $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ is convergent, what kind of error estimate do we get for $\widehat{F}(m) - \hat{f}(m)$ expressed with the exact Fourier coefficients $\hat{f}(k)$?

5. Define the functions f and g in $L^1(\mathbb{R})$ by

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{if } |t| \le 1, \\ 0, & \text{if } |t| > 1, \end{cases} \quad \text{and} \quad g(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } |t| \le 1/2, \\ 0, & \text{if } |t| > 1/2. \end{cases}$$

Show that $f = g \star g$, (where $\star$ denotes convolution in $L^1(\mathbb{R})$), and use this fact to calculate the Fourier transform of f.

Fourierserier, 25.5.2012. Förslag till lösningar.

1.), 3.) och 4.). Se föreläsningsanteckningar.

2.) a) $f \in L^1(\mathbb{T})$, $f(t) = \cos(2\pi x t)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, då $t \in [-1/2, 1/2)$.

Fourierkoefficienterna för f:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \cdot f(t)\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} \cdot \cos(2\pi x t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t} \left(e^{2\pi i x t} + e^{-2\pi i x t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{2\pi i (x-n) t}}{2\pi i (x-n)} \right]_{-1/2}^{1/2} + \left[\frac{e^{-2\pi i (x+n) t}}{-2\pi i (x+n)} \right]_{-1/2}^{1/2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\pi i (x-n)} - e^{-\pi i (x-n)}}{2\pi i (x-n)} + \frac{e^{-\pi i (x+n)} - e^{\pi i (x+n)}}{-2\pi i (x+n)} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{e^{-\pi i n} \cdot e^{\pi i x} - e^{\pi i n} \cdot e^{-\pi i x}}{(x-n)} - \frac{e^{-\pi i n} \cdot e^{-\pi i x} - e^{\pi i n} \cdot e^{\pi i x}}{(x+n)} \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{4\pi i} \left(\frac{2i \sin \pi x}{x-n} + \frac{2i \sin \pi x}{x+n} \right)$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{x \cdot \sin \pi x}{\pi (x^2 - n^2)}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$$

2.) b) Apply Parsevals identity (1.13) with $f = g$: $(f \in L^2(T))$

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\int_0^1 f(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \cos^2(2\pi x t)\,dt \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{(1+\cos(4\pi x t))}_{\text{jämn fkt.}}\,dt$$

$$= \left[t + \frac{\sin(4\pi x t)}{4\pi x}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi x}.$$

Parseval: $$\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\cdot\overline{\hat{f}(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cdot \sin^2(\pi x)}{\pi^2 (x^2-n^2)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-n^2)^2} = \pi \cdot \frac{2\pi x + \sin(2\pi x)}{4x^3 \sin^2(\pi x)}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

5.) $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $$f(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2. \end{cases}$$

Vi beräknar $g * g$:

$$(g*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)g(s)\,ds = \int_{-1/2}^{1/2} g(t-s)\cdot 1\,ds = \boxed{\begin{array}{c} r = t-s \\ dr = -ds \\ \begin{array}{c|c} s & r \\ \hline -1/2 & t+1/2 \\ 1/2 & t-1/2 \end{array}\end{array}}$$

$$= \int_{t+1/2}^{t-1/2} g(r)(-dr) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} g(r)\,dr = I(t). \quad I(t) = 0 \text{ om } |t| > 1$$

$$0 \le t \le 1: \; I(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} 1\cdot dr = 1/2 - (t - 1/2) = 1 - t = 1 - |t|.$$

(forts. vänd!)

5.] (Forts.)

$0 > t \geq -1$: $\quad I(t) = \int_{-1/2}^{t+1/2} 1 \cdot dr = t + 1/2 - (-1/2) = 1 - (-t)$
$= 1 - |t|$,

$\therefore \quad \underline{\underline{g * g = f}}$.

Nu gäller: $\quad \hat{f} = \widehat{g * g} = \hat{g} \cdot \hat{g}$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} \cdot g(t)\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \omega t} \, dt \\ &= \left[\frac{e^{-2\pi i \omega t}}{-2\pi i \omega} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2\pi i \omega} \cdot \left(e^{\pi i \omega} - e^{-\pi i \omega} \right) \\ &= \frac{\sin(\pi \omega)}{\pi \omega}, \quad \omega \neq 0 \\ \hat{g}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot t} \cdot g(t) \, dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot dt = 1. \end{aligned} \right.$$

$$\therefore \quad \hat{g}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi \omega)}{\pi \omega}, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega = 0. \end{cases}$$

Alltså gäller: $\quad \hat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi \omega)}{(\pi \omega)^2}, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega = 0. \end{cases}$