Demonstrationer i flerdimensionell analys, vecka 7

1. Betrakta kurvan $x^5y^{10} = 2 - y$ och bestäm ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $(1, 1)$.

2. a) Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x, y, z) = \sin xy + \tan yz$ i punkten $(0, \pi/4, 1)$ i riktning mot punkten $(2, \pi/2, 0)$.

   b) Visa att $u(\mathbf{x}) = \sin(\ln\sqrt{x^2 + y^2})$, där $\mathbf{x} = (x, y)$, är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$\mathbf{x} \cdot \nabla(\mathbf{x} \cdot \nabla u) + u = 0 \ .$$

3. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 2$ i punkten $(1, -1, 2)$. Bestäm ekvationen för normalen till ytan i samma punkt. (Normalen genomlöper tangentplanet ortogonalt i punkten).

4. Funktionerna $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är givna av

$$f(u, v) = (uv, u - v)\,, \quad g(x, y) = (x^2, xy)\,.$$

   Bestäm med hjälp av kedjeregeln funktionalmatrisen för den sammansatta avbildningen $f \circ g$.

5. (Tentuppgift 3.3.14). Visa att ytan $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ i punkten $(1, -1, 2)$ skär varje yta av formen $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ under rät vinkel ($a \in \mathbb{R}$). (Ledning: Normalriktningarna för tangentplanen till ytorna i punkten är ortogonala).

6. Räkna ut funktionaldeterminanten $\frac{d(x,y,z)}{d(r,v,u)}$ för övergång till cylindriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \\ z = u\,. \end{cases}$$