Demonstrationer i flerdimensionell analys, vecka 18

1. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma (x^2+xy)\,dx+(y^2-xy)\,dy$, där kurvan Γ går från origo till punkten $(2,2)$ längs
a) linjen $y=x$,
b) parabeln $x^2=2y$.

2. Bestäm en enkel, sluten, positivt orienterad, kontinuerligt deriverbar kurva Γ i planet så att kurvintegralen

$$\int_\Gamma (4y^3+y^2x-4y)\,dx+(8x+x^2y-x^3)\,dy$$

blir så stor som möjligt och beräkna kurvintegralen för denna kurva.

3. En partikel förflyttas från punkten $(0,-1)$ till punkten $(0,1)$ under inverkan av kraftfältet $\mathbf{F}(x,y)=(\mathrm{e}^x,1+xy^2)$. Beräkna det arbete som utförs, då rörelsen sker längs en halvcirkelbåge i halvplanet $x\geq 0$. (Ledning: utnyttja Greens formel)

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \frac{(y+1)\,dx-x\,dy}{x^2+(y+1)^2}$$

då Γ är cirkelbågen från $(-3,4)$ till $(3,4)$, via $(0,5)$, längs $x^2+y^2=25$.

5. En partikel påverkas av kraften $\overline{F}(x,y)=(\frac{y^2}{1+x^2y^2},\frac{xy}{1+x^2y^2}+\arctan(xy))$. Visa att kraftfältet är konservativt och bestäm en potentialfunktion U till F. Beräkna arbetet som krävs att flytta en partikel från origo till punkten $(1,1)$.

6. Beräkna arean av området mellan x-axeln och cykloidbågen

$$x=t-\sin t \quad \text{och} \quad y=1-\cos t,$$

där $0\leq t\leq 2\pi$.