Demonstrationer i flerdimensionell analys, vecka 17

1. Beräkna
$$\iint\limits_D \frac{e^{-x}}{1+y^2}\,dxdy\,,$$
där $D = \{(x,y) : x \geq 0\}$.

2. Låt $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1 \text{ och } x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$. Visa att
$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$$
är konvergent för $\alpha > 1$ och ange dubbelintegralens värde.

3. Undersök den generaliserade dubbelintegralen
$$\iint\limits_D \ln|x+y|dxdy\ ,$$
där $D = \{(x,y) : |x|+|y| < 1\,,\ x+y \neq 0\}$. (Ledning: Gör ett lämpligt variabelbyte, utnyttja sedan symmetri hos integranden med avseende på integrationsområdet och bilda en lämplig uttömmande följd).

4. Undersök med hjälp av Fubinis sats konvergensen hos dubbelintegralrena

   a) $\iint\limits_D (xy)^{-2}\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : x \geq 1\,, 1 \leq y \leq 2\}$,

   b) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{e^x\,(e^y+e^{-y})}$, där $D = \{(x,y) : x \geq 0\,, y \geq 0\}$

5. Beräkna
$$\iiint\limits_D \frac{\sin z}{z}\,dxdydz$$
där $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq z^2\,,\ 0 < z \leq 1\}$.