

Demonstrationer i flerdimensionell analys, vecka 17

1. Beräkna

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3},$$

där $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

2. Låt $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1 \text{ och } x \geq 0, y \geq 0\}$. Visa att

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$$

är konvergent för $\alpha > 1$ och ange dubbelintegralens värde.

3. Undersök den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \ln|x+y|dxdy,$$

där $D = \{(x, y) : |x| + |y| < 1, x + y \neq 0\}$. (Ledning: Gör ett lämpligt variabelbyte, utnyttja sedan symmetri hos integranden med avseende på integrationsområdet och bilda en lämplig uttömmande följd).

4. Beräkna med hjälp av Fubinis sats den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{e^{-(x-y)}}{1+(x+y)^2}dxdy,$$

där $D = \{(x, y) : x \geq 0, |y| \leq x\}$. (Ledning: Gör ett lämpligt variabelbyte så att Fubinis sats kan tillämpas).

5. Beräkna

$$\iiint_K z dxdydz$$

där $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.