Ordobegreppet för polynom av två variabler

Ett polynom av två variabler kan skrivas som en summa av termer $a_{ij}h^ik^j$, där a_{ij} är konstant och i, j är naturliga tal, exempelvis:

$$p(h,k) = 5h^2k^1 - hk + 3h - 2k.$$

Definition 27. Graden av en term $a_{ij}h^ik^j$ i ett polynom är $i+j$ om $a_{ij} \neq 0$, och $-\infty$ om $a_{ij} = 0$. Ett polynom är *homogent* om alla termer har samma grad. Ett polynom är på *standardform*, om det inte har två termer med samma i- och j-index. Graden av ett polynom är det högsta gradtalet hos polynomets termer, då polynomet är i standardform.

Anmärkning: Då vi definierat grad $0 = -\infty$ gäller det att grad $p \cdot q$ = grad p + grad q, även om p eller q är konstanten 0.

Exempel 74. Polynomet $p(h,k) = 2 + h + 3h^2k - 5hk^2$ har graden 3. Summan $3h^2k - 5hk^2$ är ett homogent polynom av graden 3. Polynomet

$$p(h,k) = 1 + k + h^2(1-k)^2 - h^2k^2$$

är av graden 3, vilket framgår ur dess standardform:

$$p(h,k) = 1 + k + h^2 - 2h^2k + h^2k^2 - h^2k^2 = \underline{1 + k + h^2 - 2h^2k}.$$

<u>Definition 28:</u> Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och sätt $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Funktionen f sägs vara av stort ordo r^n då $r \to 0$, beteckning $f = O(r^n)$, då $r \to 0$, om kvoten

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{r^n}$$

är begränsad i en omgivning U av $(0, 0, \dots, 0)$.

<u>Tolkning:</u> Det finns en omgivning U av $(0, \dots, 0)$ där f kan uttryckas med hjälp av en begränsad funktion $H(x_1, \dots, x_n)$, enligt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = r^n \cdot H(x_1, \dots, x_n),$$

Ordo-algebra för avbildningar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Antag att $\begin{cases} f(x,y) = O(r^4) \\ g(x,y) = O(r^3) \end{cases}$, då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.

Då finns $F(x,y)$, $G(x,y)$ begränsade i någon omgivning U av $(0,0)$, så att $\forall (x,y) \in U$ gäller:

$$f(x,y) = r^4 F(x,y),$$
$$g(x,y) = r^3 G(x,y).$$

För alla $(x,y) \in U$ gäller då:

$$f(x,y) \pm g(x,y) = r^3 \left[r F(x,y) \pm G(x,y) \right],$$
$$f(x,y) \cdot g(x,y) = r^7 \left[F(x,y) \cdot G(x,y) \right],$$

där uttrycken innanför klamrarna är begränsade i U, med andra ord: $\begin{cases} f \pm g = O(r^3) \\ f \cdot g = O(r^7) \end{cases}$, då $r \to 0$.

Allmänt gäller följande formler:

$$O(r^p) \pm O(r^q) = O(r^p), \quad \text{om } p \leq q,$$
$$O(r^p) \cdot O(r^q) = O(r^{p+q}),$$
$$(O(r^p))^n = O(r^{np}),$$

då $r \to 0$, vid ordo-kalkyler.

Sats 36. Antag att $p(h,k)$ är ~~ett~~ homogent polynom av graden $n > -\infty$. Då gäller:

$$p(h,k) = O(r^n) \text{ och } p(h,k) \neq O(r^\alpha)$$

för alla $\alpha > n$, då $r = |(h,k)| = \sqrt{h^2+k^2} \to 0$.

Bevis: Då $|h|$ och $|k|$ är $\leq \sqrt{h^2+k^2} = r$ för alla h och k ~~att~~ får vi för en term av graden n

$$|a_{ij}h^ik^j| \leq |a_{ij}|r^ir^j = |a_{ij}|r^{i+j} = |a_{ij}|r^n,$$

så $a_{ij}h^ik^j = O(r^n)$, då $r \to 0$. Då alla termer i p är av graden n ger ordo-kalkylen för summor ~~att~~ $p = O(r^n)$, då $r \to 0$.

Antites: $p = O(r^\alpha)$, då $r \to 0$, med $\alpha > n$.

Då finns en omgivning U av $(0,0)$ och en begränsad funktion $H(x,y)$, med $|H(x,y)| \leq C$ i U så ~~att~~

$$(*) \qquad |p(h,k)| = r^\alpha \cdot |H(h,k)| \leq C r^\alpha = C(\sqrt{h^2+k^2})^\alpha.$$

Då $p \not\equiv 0$ finns i U en punkt (h_0,k_0): $p(h_0,k_0) \neq 0$.

Dessutom gäller $p(th_0,tk_0) = t^n p(h_0,k_0)$, då p är ~~ett~~ homogent polynom av graden n.

För $t<1$ har vi att $(th_0, tk_0) \in U$, och då ger formel (*) ~~att~~:

$$|t|^n |p(h_0,k_0)| = |p(th_0,tk_0)| \leq C\left(\sqrt{(th_0)^2+(tk_0)^2}\right)^\alpha$$
$$= C|t|^\alpha \left(\sqrt{h_0^2+k_0^2}\right)^\alpha,$$

Vilket ~~ger att~~

$$|p(h_0,k_0)| = C|t|^{\overbrace{\alpha-n}^{>0}} \cdot \left(\sqrt{h_0^2+k_0^2}\right)^\alpha \longrightarrow 0, \text{ då } t \to 0,$$

Men detta ger en motsägelse, så antitesen är falsk och $p \neq O(r^\alpha)$ för alla $\alpha > n$, då $r \to 0$. $\square$

Om ~~ett~~ polynom p inte är homogent, så kan det skrivas som en summa av homogena polynom $p = p_1 + \dots + p_k$, och enligt ordokalkylens summaformel är det då det lägsta gradtalet av polynomen $p_1, \dots, p_k$ som bestämmer ordningen för p. Då gäller, (delvis med stöd av Sats 36), följande resultat:

Sats 37. Om polynomet $p \not\equiv 0$ och n är det lägsta gradtalet hos polynomets termer på standardformen, så är

$$p = O(r^n) \text{ och } p \neq O(r^{n+1}),$$

då $r \to 0$.

Taylors formel med ordoresterm

Antag nu att $f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n+1$ i en omgivning av punkten (x,y). I en sluten omgivning av (x,y) begränsas de till beloppet av en konstant C. För tillräckligt små h och k i resttermen R_{n+1} i Taylors formel får vi då uppskattningen: $(0<\tau<1)$

$$|R_{n+1}| = \left| \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} h^m k^{n+1-m} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^m \partial y^{n+1-m}}(x+\tau h, y+\tau k)\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} |h|^m |k|^{n+1-m} \cdot C$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\, q(|h|,|k|),$$

där q är ett homogent polynom av grad $n+1$. Därmed gäller, med stöd av Sats 36, att $R_{n+1} = O(r^{n+1})$, då $r \to 0$.

<u>Sats 38</u>. (Taylors formel med ordoresterm). Om $f(x,y)$ har <u>kontinuerliga</u> <u>partiella derivator upp till ordning $n+1$</u> i en omgivning av (x,y) så är

$$f(x+h,y+k) = P_n(h,k) + O(r^{n+1}), \quad \text{då } r = \sqrt{h^2+k^2} \to 0,$$

där

$$P_n(h,k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y)$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} h^m k^{n-m} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right) f(x,y).$$

Sats 39. (Taylorutvecklingens entydighet).

Om $f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n+1$ i en omgivning av punkten (x,y) och om

$$f(x+h, y+k) = p(h,k) + O(r^{n+1}), \text{ då } r = \sqrt{h^2+k^2} \to 0,$$

där $p(h,k)$ är ett polynom av gradtal $\leq n$, så är $p(h,k) \equiv P_n(h,k)$, där $P_n(h,k)$ är Taylorpolynomet av gradtal $\leq n$ i Sats 38.

Bevis: Låt $p(h,k)$ vara polynomet i antagandena till Sats 39. Enligt Sats 38 kan f Taylorutvecklas i (x,y) enligt:

$$f(x+h, y+k) = P_n(h,k) + O(r^{n+1}), \text{ då } r = \sqrt{h^2+k^2} \to 0.$$

Då har vi:

$$P_n(h,k) + O(r^{n+1}) = f(x+h, y+k) = p(h,k) + O(r^{n+1}),$$

vilket ger att

$$P_n(h,k) - p(h,k) = O(r^{n+1}), \text{ då } r \to 0.$$

Men $P_n - p$ är ett polynom av gradtal $\leq n$, så Sats 37 ger att $P_n - p \equiv 0$, vilket ger att $p(h,k) \equiv P_n(h,k)$. □

Anmärkning: Entydighetssatsen gör det möjligt att bestämma Taylorutvecklingar ur kända utvecklingar av elementära funktioner, användande ordokalkyl och undvikande partiella deriveringar.

Exempel 75. (Metod II). Bestäm Taylorpolynomet av 2:a ordningen till $f(x,y)=e^{xy}$ i punkten $(2,3)$.

Lösning: Sätt $\begin{cases} x=2+h, \\ y=3+k. \end{cases}$ Från envariabelanalysen vet vi att $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+O(t^3)$. Vidare får vi

$$
\begin{aligned}
e^{xy} &= e^{(2+h)(3+k)} = e^6 \cdot e^{hk+3h+2k} \\
&= e^6\left(1+hk+3h+2k+\frac{1}{2}(hk+3h+2k)^2+O(r^3)\right) \\
&= e^6\left(1+hk+3h+2k+\frac{1}{2}(h^2k^2+9h^2+4k^2+6h^2k+4hk^2+12hk)\right) \\
&\qquad + O(r^3) \\
&= e^6\left(1+3h+2k+\frac{9}{2}h^2+7hk+2k^2\right)+O(r^3)
\end{aligned}
$$

Sats 39 ger: $P_2(h,k) = e^6\left(1+3h+2k+\frac{9}{2}h^2+7hk+2k^2\right)$.

Exempel 76. Maclaurinutveckla till och med ordning 2 funktionen $f(x,y) = (1+\sin(x+y))\ln(1+2x+y)-2x-y$.

Lösning: Sätt: $\begin{cases} x=h, \\ y=k. \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(t) = t+O(t^3), \\ \ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+O(t^3). \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ f(h,k) &= (1+h+k+O(r^3))\left(2h+k-\frac{(2h+k)^2}{2}+O(r^3)\right) \\
&\quad -2h-k \\
&= 2h^2+3hk+k^2-2h^2-2hk-\frac{k^2}{2}+O(r^3) \\
&= hk+\frac{k^2}{2}+O(r^3).
\end{aligned}
$$

$$\left(P_2(h,k) = hk+\frac{k^2}{2} = xy+\frac{y^2}{2} \right)$$

Exempel 77. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3-\cos x-\cos y-\cos z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Lösning: $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$.

Vi har att $x, y, z = O(r)$, där $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$\begin{aligned}3-\cos x-\cos y-\cos z &= 3 - \left(1-\tfrac{1}{2}x^2+O(x^4)\right)\\ &\quad - \left(1-\tfrac{1}{2}y^2+O(y^4)\right)\\ &\quad - \left(1-\tfrac{1}{2}z^2+O(z^4)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+O(r^4)\\ &= \tfrac{1}{2}r^2+O(r^4)\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3-\cos x-\cos y-\cos z}{x^2+y^2+z^2}} = \left[(x,y,z)\to(0,0,0) \Leftrightarrow r\to 0\right]$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{2}r^2+O(r^4)}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{2}+O(r^2)\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}.$$