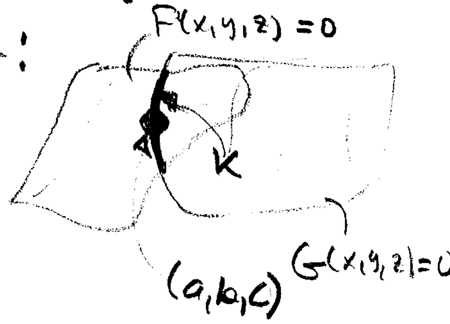
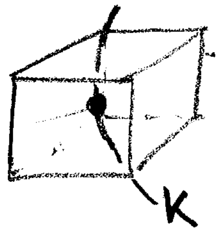
Antag att $F(a,b,c) = G(a,b,c) = 0$, så att punkten (a,b,c) ligger på skärningskurvan K mellan de två nivåytorna:



Antag att $\dfrac{d(F,G)}{d(y,z)} \neq 0$.

Då uppfylls för ett rätblock D:

(a,b,c)



$$\begin{cases} x \in]a_1, a_2[\\ y \in]b_1, b_2[\\ z \in]c_1, c_2[\end{cases}$$

För varje $x \in]a_1, a_2[$ existerar entydig lösning $(x, y(x), z(x))$ till ekvationssystemet $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Inne i D kan då rymdkurvan K framställas med parameterframställningen:

$$(x, y(x), z(x)), \quad a_1 < x < a_2,$$

och $y = y(x)$, $z = z(x)$ har kontinuerliga derivator och implicit derivering av F och G ger:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) \cdot 1 + F'_y(x,y,z) \cdot y'(x) + F'_z(x,y,z) \cdot z'(x) = 0 \\ G'_x(x,y,z) \cdot 1 + G'_y(x,y,z) \cdot y'(x) + G'_z(x,y,z) \cdot z'(x) = 0 \end{cases}$$

Vi formulerar nu satsen för ett dylikt ekvationssystem.

Sats 30. Antag att $F(x,y,z)$ och $G(x,y,z)$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av (a,b,c), där $F(a,b,c) = G(a,b,c) = 0$. Antag att $\dfrac{d(F,G)}{d(y,z)} \neq 0$. Då finns ett rätblock $D = \{(x,y,z) : a_1 < x < a_2,\ b_1 < y < b_2,\ c_1 < z < c_2\}$ som innehåller (a,b,c), så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

för varje $x \in]a_1, a_2[$ har en entydigt bestämd lösning $(x, y(x), z(x))$, $y(x) \in]b_1, b_2[$, $z(x) \in]c_1, c_2[$. Funktionerna $y(x)$ och $z(x)$ har kontinuerliga derivator som uppfyller:

$$\begin{cases} F'_x(x,y(x),z(x)) + F'_y(x,y(x),z(x))\,y'(x) + F'_z(x,y(x),z(x))\,z'(x) = 0 \\ G'_x(x,y(x),z(x)) + G'_y(x,y(x),z(x))\,y'(x) + G'_z(x,y(x),z(x))\,z'(x) = 0. \end{cases}$$

Anmärkning: För den allmännaste formuleringen hänvisas till kursboken. För en motivering (ett bevis) som följer linjerna av vårt bevis av Sats 29. Vi nöjer oss med att formulera satsen:

Sats 31. Antag att $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Betrakta ekvationssystemet $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{0}$, $(\bar{x} = (x_1,\dots,x_n), \bar{y} = (y_1,\dots,y_m))$ utskrivet i komponentform:

$$(16) \quad \begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0, \\ \quad \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0. \end{cases}$$

Antag att $f(\bar{a},\bar{b}) = \bar{0}$, $(\bar{a} = (a_1,\dots,a_n), \bar{b} = (b_1,\dots,b_m))$, att $f_j : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,m$, har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $(\bar{a},\bar{b})$ och att

$$\frac{d(f_1,\dots,f_m)}{d(y_1,\dots,y_m)} \neq 0 \text{ i punkten } (\bar{a},\bar{b}).$$

Då finns i $\mathbb{R}^{n+m}$ en omgivning av punkten $(\bar{a},\bar{b})$ sådan att lösningarna $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = (\bar{x},\bar{y})$ till (16) i omgivningen definierar $\bar{y}$ entydigt som funktion av $\bar{x}$, $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$, dvs.

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1,\dots,x_n), \\ \quad \vdots \\ y_m = y_m(x_1,\dots,x_n). \end{cases}$$

Funktionerna $y_1,\dots,y_m$ är definierade i en tillräckligt liten omgivning av $\bar{x}$ och är där kontinuerligt deriverbara. Då gäller i omgivningen $f(\bar{x},\bar{y}(\bar{x})) = \bar{0}$ och $\bar{y}(\bar{a}) = \bar{b}$. Funktionalmatrisen för $\bar{y}(\bar{x})$ erhålls genom implicit derivering: $\bar{y}'(\bar{x}) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}(\bar{x}))\right]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}(\bar{x}))$

Exempel 67. Visa att $x^5+y^3+z^4-(x^2+y^2)z=1$ lokalt kring $(1,1,1)$ definierar z som funktion av x och y. Beräkna $z'_x(1,1)$ och $z'_y(1,1)$.

Lösning: Sätt $f(x,y,z) = x^5+y^3+z^4-(x^2+y^2)z-1$.

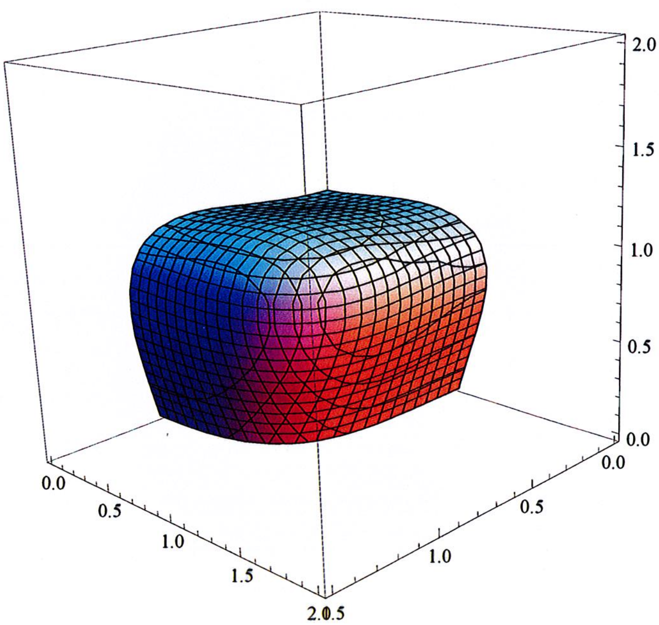
$$\begin{cases} f'_z(x,y,z) = 4z^3 - x^2 - y^2, \\ \underline{f'_z(1,1,1) = 2 \neq 0.} \end{cases} \qquad \begin{cases} f'_x = 5x^4 - 2xz \\ f'_y = 3y^2 - 2yz \end{cases}$$

$\therefore$ f'_x, f'_y och f'_z kontinuerliga i omgivning av $(1,1,1)$ och $\underline{f'_z(1,1,1) \neq 0}$. Då är, enligt sidan 113, $z = z(x,y)$ i något rätblock D innehållande $(1,1,1)$. Vidare är $z = z(1,1) = 1$ och formlerna på sida 113 ger:

$$\begin{cases} \underline{z'_x(1,1)} = -\dfrac{f'_x(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\dfrac{5-2}{2} = \underline{-\dfrac{3}{2}}, \\[2ex] \underline{z'_y(1,1)} = -\dfrac{f'_y(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\dfrac{3-2}{2} = \underline{-\dfrac{1}{2}}. \end{cases}$$

```
In[14]:= ContourPlot3D[x^5 + y^3 + z^4 - (x^2 + y^2) z == 1, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 2}, {z, 0, 2}]
```

Out[14]=



Exempel 68. Visa att sambandet

$$\begin{cases} f(x,y,z) = \sin(x+y) + \sin(y+z) + z = 0, \\ g(x,y,z) = \cos(x+y) + \cos(y+z) + y - 2 = 0, \end{cases}$$

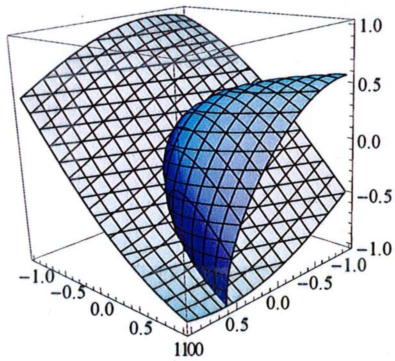
i en omgivning av (0,0,0) entydigt definierar (x,y) som en kontinuerligt deriverbar funktion av z, dvs, $x = x(z)$ och $y = y(z)$.

Lösning: Skärningskurvan $K = (x(z), y(z), z)$.

Kollar villkoren i Sats 30:

$f(0,0,0) = 0 = g(0,0,0)$.

Klart att f'_x, f'_y, f'_z och g'_x, g'_y, g'_z är kontinuerliga i en omgivning av (0,0,0).



$$\frac{d(f,g)}{d(x,y)}(0,0,0) = \left| \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) + \cos(y+z) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) - \sin(y+z) + 1 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,0)} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \neq 0.$$

∴ Då ger Sats 30 att skärningskurvan K i en omgivning av (0,0,0) entydigt framställs av $(x(z), y(z), z)$, där $x(z)$ och $y(z)$ är kontinuerligt deriverbara för z i en omgivning av $z = 0$.

Vi kan dessutom beräkna tangentriktningen i punkten $(0,0,0)$ för skärningskurvan K, den ges ju av $(x'(0), y'(0), 1)$. Genom implicit derivering av sambanden $f(x(z), y(z), z) = 0$ och $g(x(z), y(z), z) = 0$ med avseende på z erhålls:

$$\begin{cases} f'_x(x(z),y(z),z)\cdot x'(z) + f'_y(x(z),y(z),z)\cdot y'(z) + f'_z(x(z),y(z),z) = 0 \\ g'_x(x(z),y(z),z)\cdot x'(z) + g'_y(x(z),y(z),z)\cdot y'(z) + g'_z(x(z),y(z),z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y)(x'(z)+y'(z)) + \cos(y+z)(y'(z)+1) + 1 = 0 \\ -\sin(x+y)(x'(z)+y'(z)) - \sin(y+z)(y'(z)+1) + y'(z) = 0 \end{cases}$$

(Kolla!)

Insättning av $(x,y,z) = (0,0,0)$ ger:

$$\begin{cases} 1\cdot(x'(0)+y'(0)) + 1\cdot(y'(0)+1) + 1 = 0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

vilket ger att $x'(0) = -2$ och $y'(0) = 0$.

Skärningskurvan K har då i punkten $(0,0,0)$ tangentriktningen $(-2,0,1)$.

Om derivering av integraler

För en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ ger analysens huvudsats att funktionen $S(x)$,

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad x \in [a,b],$$

har en kontinuerlig derivata $S'(x) = f(x)$ på $[a,b]$, och funktionen

$$T(x) = \int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt$$

har kontinuerliga derivatan $T'(x) = -f(x)$.

Derivering av S och T är specialfall av problemet att uttrycka derivatan av en funktion $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy,$$

i derivator av funktionerna α, β och f.

Vi betraktar först ett specialfall:

Sats 32. Antag att $f(x,y)$ och $f'_x(x,y)$ är kontinuerliga på rektangeln $D = \{(x,y) : a \le x \le b, \alpha \le y \le \beta\}$. Då gäller

$$\frac{d}{dx} \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy,$$

och derivatan är en kontinuerlig funktion av x.

Bevis: Sätt $L(x) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy$. Då gäller

$$\left| \frac{L(x+h)-L(x)}{h} - \int_\alpha^\beta f'_x(x,y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int_\alpha^\beta \left(\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - f'_x(x,y) \right) dy \right|$$

$$= \left| \int_\alpha^\beta \left(f'_x(x+\theta h,y) - f'_x(x,y) \right) dy \right| , \quad 0<\theta<1,$$
(Medelvärdessatsen)

Enligt antagandet är f'_x kontinuerlig på den kompakta mängden D, och därmed likformigt kontinuerlig på D, (Sats 12). Men då får vi uppskattningen:

$$|f'_x(x+\theta h,y) - f'_x(x,y)| \leq M(h),$$

där $M(h)$ är oberoende av x och y, och $M(h) \to 0$, då $h \to 0$. Alltså:

$$\left| \int_\alpha^\beta (f'_x(x+\theta h,y) - f'_x(x,y))\,dy \right| \leq \int_\alpha^\beta |f'_x(x+\theta h,y) - f'_x(x,y)|\,dy$$

$$\leq M(h)(\beta-\alpha) \to 0,$$
då $h \to 0$.

$\therefore$ $L'(x) = \int_\alpha^\beta f'_x(x,y)\,dy$. Att $L'(x)$ är kontinuerlig inses genom att välja $x_0 \in [a,b]$ och betrakta:

$$|L'(x_0+h) - L'(x_0)| = \left| \int_\alpha^\beta (f'_x(x_0+h,y) - f'_x(x_0,y))\,dy \right|$$

$$\leq \int_\alpha^\beta |f'_x(x_0+h,y) - f'_x(x_0,y)|\,dy \leq M_2(h)(\beta-\alpha) \to 0,$$

igen med stöd av f'_x:s likformiga kontinuitet, så $L'(x_0+h) \to L'(x_0)$, då $h \to 0$. $\therefore$ L' kontinuerlig. $\square$

Exempel 69. Bestäm derivatan av funktionen

$$I(x) = \int_1^2 \frac{\sin(xy)}{y}\, dy.$$

Lösning: $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y}$ och $f'_x(x,y) = \cos(xy)$ är kontinuerliga på $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, 1 \leq y \leq 2\}$.

Sats 32 ger att:

$$\underline{\underline{I'(x)}} = \int_1^2 f'_x(x,y)\, dy = \int_1^2 \cos(xy)\, dy = \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_1^2$$

$$= \frac{\sin 2x}{x} - \frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{\frac{1}{x} \cdot 2\cos\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}}.$$

Betrakta nu det allmänna problemet att derivera

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy.$$

Vi får följande generalisering av Sats 32:

Sats 33. Antag att $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är deriverbara funktioner med värden i intervallet $c \leq y \leq d$. Antag att $f(x,y)$ och $f'_x(x,y)$ är kontinuerliga på rektangeln $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Då gäller:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x,y)\, dy + f(x,\beta(x))\,\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\,\alpha'(x).$$

__Bevis:__ Definiera funktionen $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ genom:

$$F(x,u,v) = \int_v^u f(x,y)\,dy.$$

Då gäller: $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = F(x, \beta(x), \alpha(x))$.

Med stöd av Sats 32 är $F'_x = \int_v^u f'_x(x,y)\,dy$ och $F'_u = f(x,u)$, $F'_v = -f(x,v)$. __Kedjeregeln__ ger:

$$G'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\left[\begin{array}{l} u=\beta(x) \\ v=\alpha(x) \end{array}\right] = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(x,y)\,dy + f(x,\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\cdot\alpha'(x). \quad \square$$

__Exempel 70.__ Beräkna för $a>0$ integralen

$$F(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,dx.$$

__Lösning:__ Sats 33 ger:

$$F'(a) = \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x}{1+ax}\,dx + \frac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}\cdot 1$$

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{1+ax} = \dfrac{1}{1+a^2}\left(\dfrac{a+x}{1+x^2} - \dfrac{a}{1+ax}\right) & \text{Partialbråks-uppdelning (kolla!)} \\ \displaystyle\int_0^a \frac{x}{(1+x^2)(1+ax)}\,dx = \frac{1}{1+a^2}\left(a\cdot\arctan(a) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2)\right) & \text{(kolla!)} \end{array}\right]$$

__Då erhålls:__ $F'(a) = \dfrac{a\arctan a}{1+a^2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\ln(1+a^2)}{1+a^2}.$

Nu är ju $\underline{F(a)} = F(a) - F(0) = \underline{\int_0^a F'(t)\,dt}$.

$$\int_0^a \frac{t\cdot\arctan t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^a \arctan t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$\overset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2}\left(\Big[\arctan t\cdot\ln(1+t^2)\Big]_0^a - \int_0^a \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt\right)$$

$$\therefore\ \underline{F(a) = \frac{1}{2}\arctan(a)\cdot\ln(1+a^2)}.$$

__Exempel 71.__ Visa att funktionen
$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\ln(1+t^2)\,dt$$
är en lösning till differentialekvationen
$$y'' + y = \ln(1+x^2).$$

__Lösning:__ Vi tillämpar Sats 33 två gånger:
$$y'(x) = \int_0^x \cos(x-t)\ln(1+t^2)\,dt + \sin(x-x)\ln(1+x^2)\cdot 1$$
$$= \int_0^x \cos(x-t)\ln(1+t^2)\,dt$$
$$y''(x) = \int_0^x -\sin(x-t)\ln(1+t^2)\,dt + \cos(x-x)\ln(1+x^2)\cdot 1$$
$$= \ln(1+x^2) - \int_0^x \sin(x-t)\ln(1+t^2)\,dt$$
$$= \ln(1+x^2) - y(x)$$

$$\therefore\ \underline{y''(x) + y(x) = \ln(1+x^2)}.\ \square$$

För att få derivera en <u>generaliserad integral</u> under integraltecknet krävs flera antaganden. Vi ger utan bevis satsen:

<u>Sats 34</u>. Antag ~~att~~ D är området

$$D = \{(x,y) : a < x < b,\ c \le y \le d\},$$

där "värdena" $-\infty$ och ∞ är tillåtna för a respektive b. Antag vidare att:

1°) $f(x,y)$ är <u>kontinuerlig på D</u>,

2°) $\int_a^b f(x,y)\,dx$ <u>existerar för varje</u> $y \in [c,d]$,

3°) $f'_y(x,y)$ <u>kontinuerlig i D</u> och <u>begränsas av en funktion</u> $\mu(x)$, $|f'_y(x,y)| \le \mu(x)$, för vilken $\int_a^b \mu(x)\,dx$ existerar.

Då är $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ <u>deriverbar i $[c,d]$</u>, med

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Exempel 72. Beräkna för $y>0$ integralen $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-2}dx$ genom derivering av $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-1}dx$.

Lösning: $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ och $f'_y(x,y)=\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$ är kontinuerliga i $\{(x,y): x>0, y>0\}$.

Låt c och d vara godtyckliga ~~tal~~ sådana ~~att~~ $0<c<d$. För alla $y\in[c,d]$ gäller:

$$|f'_y(x,y)| = \left|\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{2d}{(x^2+c^2)^2} =: \mu(x),$$

och $\int_0^\infty \mu(x)\,dx$ är konvergent. Vi bör är även $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-1}dx$ konvergent för $y\in[c,d]$. Då ger Sats 34 ~~att~~: $F(y)=\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-1}dx$ är deriverbar med $F'(y)=\int_0^\infty \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}dx$ för alla $y\in[c,d]$.

Men $F(y)=\frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{y}\,dx}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{1}{y}\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2y}$,

och därmed $F'(y)=-\frac{\pi}{2y^2}$. Alltså:

$$\int_0^\infty \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{\pi}{2y^2},$$

och därmed gäller:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{4y^3}.$$

Taylors formel

Avbildningar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

En funktion $f(x)$ som har **kontinuerliga** derivator upp till ordning $n+1$ i en omgivning $|x-a|<d$ av punkten a kan enligt Taylors formel uttryckas

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

där Lagranges restterm ges av

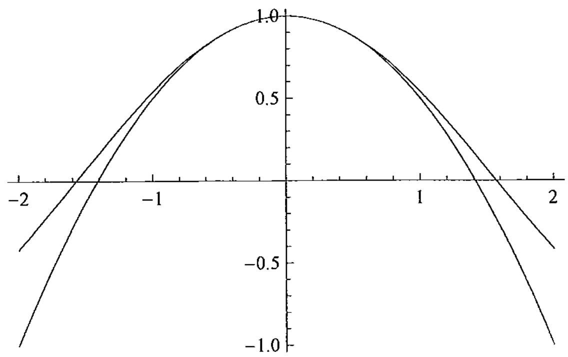
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi(x) \in [a,x], \quad ([x,a], \text{ om } x<a)$$

Vi har Taylorutvecklat $f(x)$ kring punkten a. Om $a=0$ utförs en Maclaurinutveckling av f kring 0.

Exempelvis ges Maclaurinpolynomet av gradtal två, $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$, till $f(x) = \cos x$ av $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, som ger en hyfsad approximation i närheten av $x=0$ till $\cos x$:

```
In[3]:= Plot[{Cos[x], 1 - x^2 / 2}, {x, -2, 2}]
```

Out[3]=



Vi gör en omskrivning av Taylors formel och låter ~~att~~ fixt x spela rollen av a, då kan Taylors formel skrivas

$$f(x+h) = P_n(h) + R_{n+1}(h),$$

där
$$P_n(h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

och
$$R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad x < \xi(h) < x+h.$$

Då är $f(x+h) \approx P_n(h)$ för h "tillräckligt" nära 0.

Denna omformulering av Taylors formel är välanpassad till generalisering till avbildningar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som är differentierbara i punkten $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Det gäller ju då att

$$f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\cdot\bar{h} + |\bar{h}|\,R(\bar{h}),$$

där $R(\bar{h}) \to 0$, då $\bar{h} \to \bar{0}$ och $f'(\bar{x}) = \operatorname{grad} f(\bar{x})$.

En sådan funktion kan ju approximeras linjärt i en liten omgivning av $\bar{x}$ med

$$f(\bar{x}+\bar{h}) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\cdot\bar{h}.$$

Exempelvis i fallet $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, med $\bar{h} = (h,k)$ fås

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\cdot\bar{h} = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
$$= C + Ah + Bk,$$

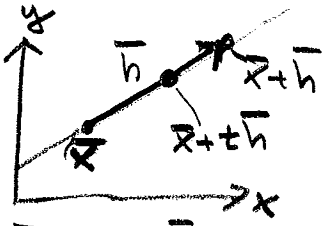
där A, B och C är konstanter. Vi nöjer oss med att generalisera Taylors formel till $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Taylors formel för avbildningar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Sats 35. (Taylors formel). Antag att $f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning $n+1$ i en omgivning av punkten (x,y). Då gäller:

$$(17)\quad f(x+h,y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) + \dots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\tau h, y+\tau k), \quad 0<\tau<1.$$

Bevis: Låt satsens antaganden gälla för punkten (x,y) och definiera funktionen $\varphi(t)$ genom $\varphi(t) = f(x+th, y+tk)$. Då kan vi derivera φ kontinuerligt upp till ordning $n+1$, dvs. φ har en Maclaurinutveckling som ges av



$\bar{x}=(x,y)$, $\bar{h}=(h,k)$, $0<t<1$.

$$(*)\quad \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

där $\tau \in (0,1)$. Nu gäller det att $\varphi(1) = f(x+h,y+k)$, så insättning av $t=1$ i formel $(*)$ ger:

$$(**)\quad f(x+h,y+k) = f(x,y) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!},$$
$$0<\tau<1.$$

Det gäller alltså att beräkna $\varphi^{(k)}(t)$, $k=1,\dots,n+1$, vilket kan göras med operatorskrivsättet:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} f(x+th, y+tk) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\bar{x}+t\bar{h})$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\bar{x}+t\bar{h})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} h^m k^{n-m}\frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\bar{x}+t\bar{h})$$

Om vi sätter $t=0$ i derivatorna och inför dem i formel (**) erhålls (17). ☐

<u>Anmärkning.</u> Formel (17) utan operatorbeteckningar blir

$$(17') \quad f(x+h, y+k) = P_n(h,k) + R_{n+1}(h,k),$$

där

$$P_n(h,k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} h^m k^{n-m}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}(x,y)\right)$$

och

$$R_{n+1}(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m} h^m k^{n+1-m}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^m \partial y^{n+1-m}}(x+\tau h, y+\tau k)\right),$$

där $0<\tau<1$.

Exempel 73. Bestäm Taylorpolynomet av 2:a ordningen i punkten $(2,3)$ till $f(x,y) = e^{xy}$.

Lösning: Metod I: (Återkommer senare till metod II)

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = y e^{xy}, & f'_x(2,3) = 3e^6 \\ f'_y(x,y) = x e^{xy}, & f'_x(2,3) = 2e^6 \\ f''_{xx}(x,y) = y^2 e^{xy}, & f''_{xx}(2,3) = 9e^6 \\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (xy+1)e^{xy}, & f''_{xy}(2,3) = 7e^6 \\ f''_{yy}(x,y) = x^2 e^{xy}, & f''_{yy}(2,3) = 4e^6 \\ f(2,3) = e^6 \end{cases}$$

Vi har $\begin{cases} 2+h = x \\ 3+k = y \end{cases} \iff \underline{\begin{cases} h = x-2 \\ k = y-3 \end{cases}}$

Med stöd av formel (17') erhålls:

$$\underline{\underline{P_2}} = f(2,3) + h f'_x(2,3) + k f'_y(2,3) + \frac{1}{2}\left(h^2 f''_{xx}(2,3) + 2hk f''_{xy}(2,3) + k^2 f''_{yy}(2,3)\right)$$

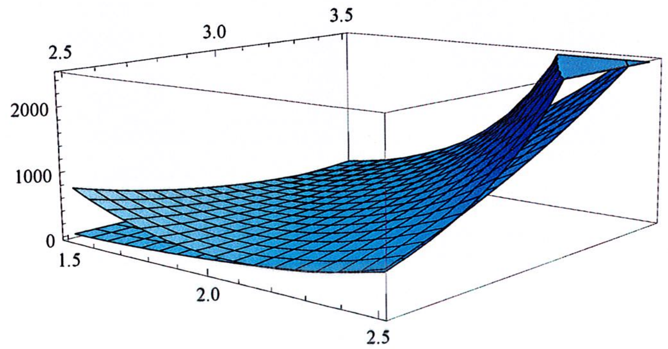
$$= e^6 + 3e^6 h + 2e^6 k + \frac{1}{2} 9e^6 h^2 + 7e^6 hk + 2e^6 k^2$$

$$= e^6\left(1 + 3(x-2) + 2(y-3) + \frac{9}{2}(x-2)^2 + 7(x-2)(y-3) + 2(y-3)^2\right)$$

$$\underline{\underline{= e^6\left(\frac{9}{2}x^2 + 7xy + 2y^2 - 36x - 24y + 67\right)}}.$$

```
In[5]:= Plot3D[{Exp[x y], p[x, y]}, {x, 1.5, 2.5}, {y, 2.5, 3.5}]
```

Out[5]=



I punkten $(x,y)=(0,0)$ övergår formel (17) i Maclaurins formel:

$$(18)\quad f(h,k)= f(0,0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$
$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\tau h,\tau k),$$
$$0<\tau<1.$$

Andra ordningens utvecklingar kan ges en matrisframställning. Vi har:

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\bar{h} = f'(\bar{x})\cdot\bar{h}$$

och

$$h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$
$$=(h,k)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}=\bar{h}^T\cdot H(\bar{x})\cdot\bar{h},$$

där $H(\bar{x})$ kallas Hessematrisen. Vi kan alltså skriva Taylorpolynomet av ordning 2:

$$(19)\quad P_2(h)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})\cdot\bar{h}+\frac{1}{2}\bar{h}^T H(\bar{x})\bar{h}.$$