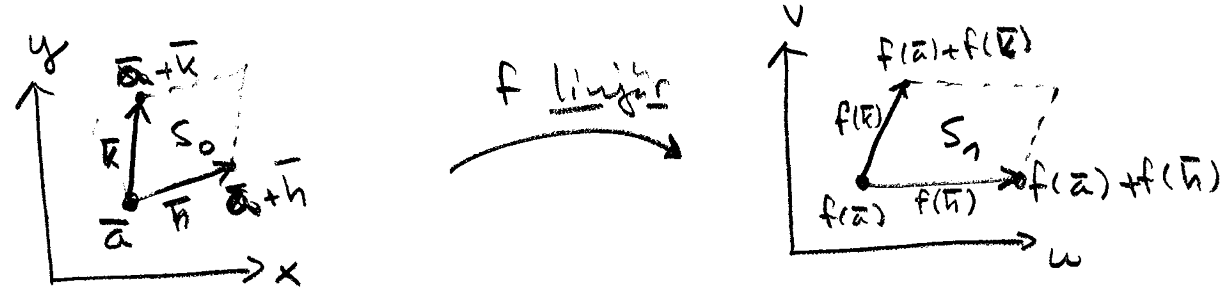
Vi skall undersöka funktionaldeterminantens geometriska implikationer. Antag först att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

$$f'(\bar{a}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$



$m(S_0)$ = ytan av S_0 $\qquad$ $m(S_1)$ = ytan av S_1

Exempel 3., sida 8, för vektorprodukter ger: $m(S_0) = |\bar{h} \times \bar{k}|$, med tolkningen $\bar{h} = (0, h_1, h_2) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{k} = (0, k_1, k_2) \in \mathbb{R}^3$.

Då gäller:

$$m(S_1) = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ f(\bar{h}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ f(\bar{k}) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ ah_1 + bh_2 \\ ch_1 + dh_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ ak_1 + bk_2 \\ ck_1 + dk_2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left\| \begin{matrix} e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & ah_1 + bh_2 & ak_1 + bk_2 \\ e_3 & ch_1 + dh_2 & ck_1 + dk_2 \end{matrix} \right\| \underset{\text{Tolka rätt!}}{=} \left| \begin{vmatrix} ah_1 + bh_2 & ak_1 + bk_2 \\ ch_1 + dh_2 & ck_1 + dk_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \end{vmatrix}}_{= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right|} \right| = \left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right| m(S_0)$$

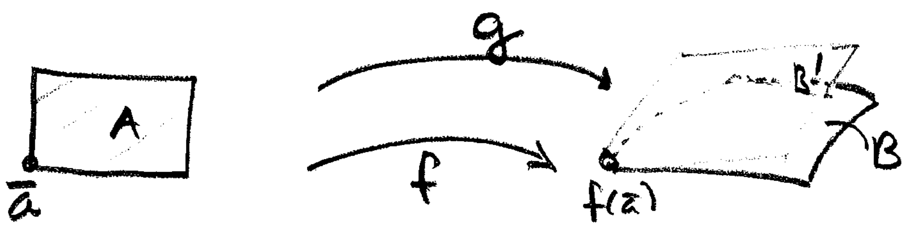
$$\therefore \quad m(S_1) = \left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right| m(S_0).$$

Låt nu $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en icke-linjär funktion $\bar{y} = f(\bar{x})$. Betrakta en "liten rektangel" A invid punkten $\bar{a} \in D_f$. Bilden av A under avbildningen f, ($f(A)$), betecknas B. Den approximerande linjära avbildningen $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$g(\bar{x}) = f(\bar{a}) + f'(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a})$ avbildar A på en parallellogram B' med $m(B') = \left| \frac{d(g)}{d(\bar{x})} \right| m(A)$.

Men $g(\bar{x}) = f'(\bar{a})\bar{x} + \underbrace{(f(\bar{a}) - f'(\bar{a})\bar{a})}_{= \text{konstant}}$,

Så $\left| \frac{d(g)}{d(\bar{x})} \right| = \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right|$ och $m(B') = \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right| m(A)$



Men då gäller: $\frac{m(B')}{m(A)} = \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right|$,

och då B approximeras av B':

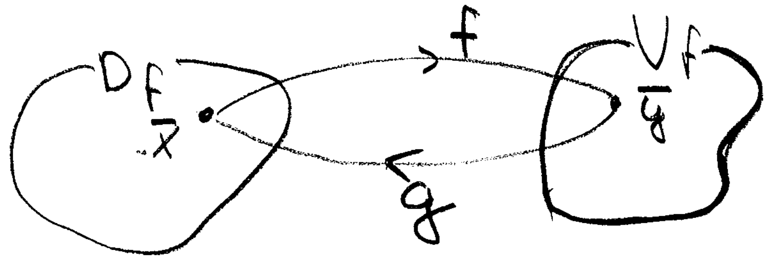
$$\frac{m(B)}{m(A)} \approx \left| \frac{d(f)}{d(\bar{x})} \right|.$$

Den lokala areaförstoringen, ytskalan, under avbildningen $y = f(\bar{x})$ ges av absolutbeloppet av funktionaldeterminanten.

I $\mathbb{R}^3$ ger $\left| \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} \right|$ den lokala volymskalan.

Inversa avbildningar

En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är <u>omvändbar</u> (1-1 <u>avbildning</u>) om varje punkt $\bar{y} = f(\bar{x})$ i värdemängden V_f är bild av exakt en vektor $\bar{x} \in D_f$.



Avbildningen f har då en <u>invers funktion</u> g med $D_g = V_f$ och $\bar{y} = f(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{x} = g(\bar{y})$.

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en <u>linjär avbildning</u>, $\bar{y} = f(\bar{x}) = A\bar{x}$, så är den <u>omvändbar om och endast om $\det A \neq 0$</u>, med $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y}) = A^{-1}\bar{y}$.

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har <u>kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\bar{a}$</u> är den differentierbar i $\bar{a}$ och Sats 25, (formel (11)), garanterar ~~att~~ vi kan approximera f i en omgivning av $\bar{a}$ med en <u>linjär funktion</u>:

$$\bar{y} = f(\bar{x}) \approx f(\bar{a}) + f'(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a}),$$

om $|\bar{x} - \bar{a}|$ är "litet". Om $\det f'(\bar{a}) \neq 0$, har vi efter omskrivningen $\bar{y} - f(\bar{a}) \approx f'(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a})$, att

$$\bar{x} - \bar{a} \approx (f'(\bar{a}))^{-1}(\bar{y} - f(\bar{a}))$$

Det verkar nu troligt att $\bar{y} = f(\bar{x})$ har en invers i en omgivning av $\bar{a}$, låt oss anta detta och sätta $\bar{b} = f(\bar{a}) \Rightarrow \bar{a} = f^{-1}(\bar{b})$. Sista formeln på föregående sida kan skrivas

$$\bar{x} = f^{-1}(\bar{y}) \approx f^{-1}(\bar{b}) + \left[f'(f^{-1}(\bar{b}))\right]^{-1}(\bar{y}-\bar{b}),$$

så f^{-1} verkar vara differentierbar med funktionalmatris $\left[f'(f^{-1}(\bar{b}))\right]^{-1}$. Ett rigoröst bevis kan ge belägg för våra funderingar.

Sats 28. Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $\bar{a} \in D_f$. Antag att funktionaldeterminanten $\det f'(\bar{a}) \neq 0$ i $\bar{a}$. Då har restriktionen av f till en omgivning U av $\bar{a}$ en invers f^{-1} som har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning V av punkten $\bar{b} = f(\bar{a})$. Inversens funktionalmatris ges av inversen till f:s funktionalmatris:

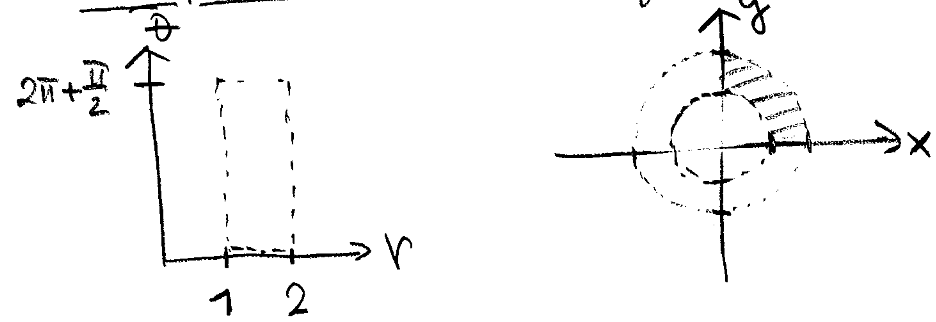
$$(14) \quad (f^{-1})' = (f')^{-1}.$$

Anmärkning: Då $(f^{-1} \circ f)' = (f^{-1})' \cdot f' = I$ får vi för funktionaldeterminanterna sambandet (13):

$$\det(f^{-1})' = \frac{1}{\det f'}.$$

Anmärkning. Sats 28 beskriver det lokala beteendet hos f. En funktion kan ha en differentierbar invers i en omgivning av varje punkt i D_f, utan att vara injektiv, vilket demonstreras av följande exempel.

Exempel 58. $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avbildar rektangeln $1<r<2$, $0<\theta<2\pi+\frac{\pi}{2}$ på en cirkelring så att punkterna i det streckade området är bilder av två punkter i rektangeln:



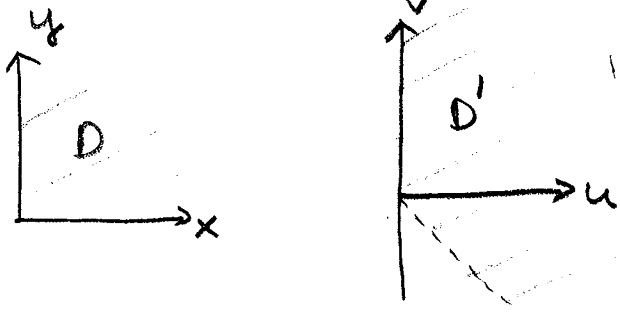
Med andra ord kan inte Sats 28 användas för att undersöka om en avbildning är (globalt) omvändbar.

Exempel 59. Betrakta på $D=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$ avbildningen $(x,y)\to(u,v)=(x^{-1}, y^{-1}-x^{-1})$.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ \frac{1}{y} = v+u \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ y = \frac{1}{u+v} \end{cases}$$

$\therefore$ D avbildas injektivt på $D' = \{(u,v): u>0,\ u+v>0\}$

$\therefore$ Omvändbar avbildning av D på D'.



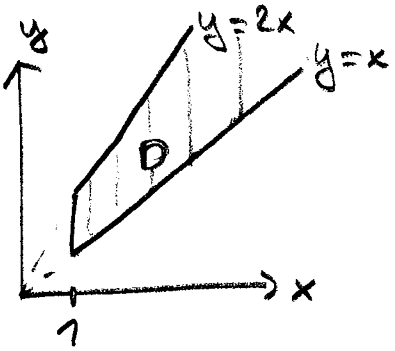
Exempel 60. Visa att $(x,y) \to (u,v) = (x, \frac{y}{x})$ ger en omvändbar avbildning av $D = \{(x,y) : 1 \le x \le y \le 2x\}$ på en mängd D' i uv-planet. Bestäm D' och beräkna $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$ samt $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$.

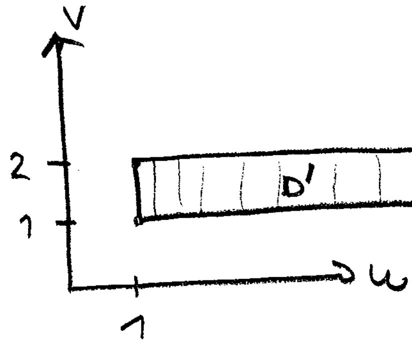
Lösning: $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = xv = uv \end{cases}$

$\therefore$ Avbildningen från D till D' är omvändbar,

Om $(x,y) \in D$ har vi: $x \ge 1$ och $1 \le \frac{y}{x} \le 2$,

så $D' = \{(u,v) : u \ge 1 \text{ och } 1 \le v \le 2\}$.





$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x},$$

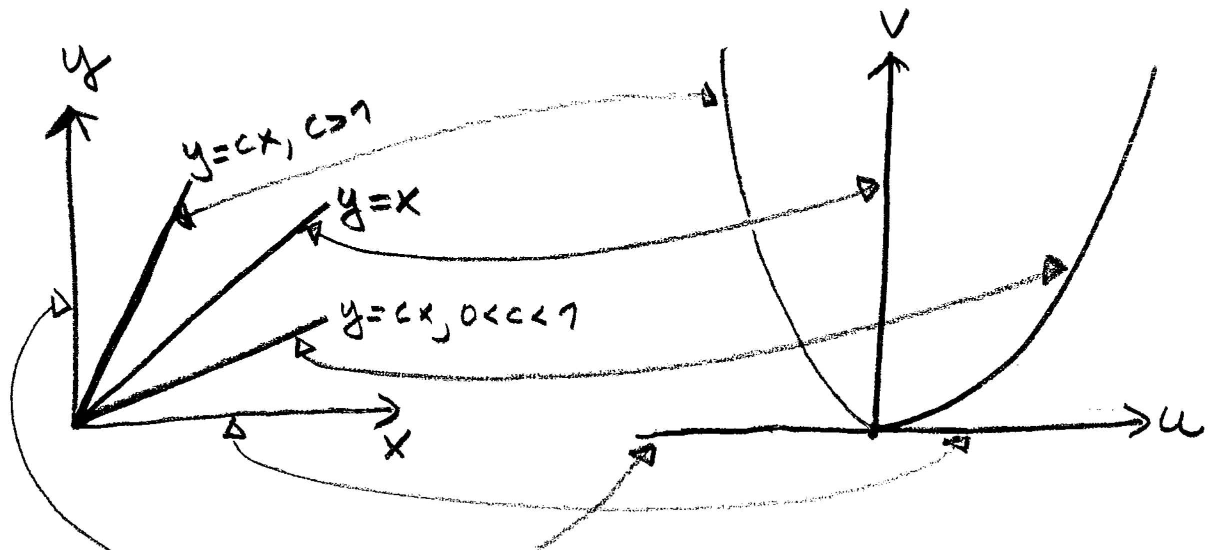
$\therefore$ Partiella derivatorna kont. i en omgivning av varje punkt i D, och $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} \ne 0$, Tillämpa Sats 28:

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \overset{(13)}{=} \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = u.$$

Exempel 67. Avbildningen $(u,v) = (x^2-y^2, x^3y)$ avbildar $D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0\}$ omvändbart på $D' = \{(u,v): u \in \mathbb{R}, v \geq 0\}$. Beräkna de partiella derivatorna x'_u, x'_v, y'_u, y'_v för den inversa avbildningen $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ från D' till D i punkten $u=0$, $v=1$.

Lösning: $\begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = x^3y \end{cases}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Strålen $(0,y)$ i D avbildas på strålen $(-y^2,0)$ i D'
— " — $(x,0)$ — " — $(x^2,0)$ i D'
— " — (x,x) — " — $(0,x^4)$ i D'
— " — (x,cx), $0<c<1$, — " — paraboliska bågen $((1-c^2)x^2, cx^4)$ i första kvadranten,
— " — (x,cx), $c>1$, — " — $((1-c^2)x^2, cx^4)$ i andra kvadranten.



Har vi en bijektiv avbildning av D på D'?

Genom varje punkt $(x,y) \in D$, med $x>0, y>0$, går exakt en linje av formen $y = cx$, $c>0$.

Tag godtyckligt en punkt $(u,v) \in D'$ med $u>0, v>0$.

Påst: $\exists$ exakt ett $c \in (0,1)$ och ett $x>0$: $(u,v) = ((1-c^2)x^2, cx^4)$

Bevis: $\begin{cases}(1-c^2)x^2 = u \\ c\,x^4 = v\end{cases} \iff \begin{cases}x^2 = \frac{u}{1-c^2} \\ x^2 = \sqrt{\frac{v}{c}}\end{cases} \Rightarrow \frac{u}{1-c^2} = \sqrt{\frac{v}{c}}$

Sätt: $f(c) = \frac{u}{1-c^2} - \sqrt{\frac{v}{c}}$, $f'(c) = 2u\frac{c}{(1-c^2)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{v}{\sqrt{c^3 v}} > 0$, då $c \in (0,1)$.

$\therefore$ f strängt växande på $(0,1)$.

$\left.\begin{array}{l}\exists\, c_0 : f(c_0) < 0 \quad (c_0 \text{ "nära" } 0) \\ \exists\, c_1 : f(c_1) > 0 \quad (c_1 \text{ "nära" } 1)\end{array}\right\} \underset{f \text{ kont på } [c_0,c_1]}{\Rightarrow} \exists$ entydigt $c_* \in (0,1) : f(c_*) = 0$.

Punkten $\left(\sqrt{\frac{u}{1-c_*^2}}, c_*\sqrt{\frac{u}{1-c_*^2}}\right)$ enda punkt i D som avbildas på (u,v). $\square$

Analog behandling av fallet $(u,v) \in D'$ med $u<0, v>0$.

$\therefore$ D avbildas bijektivt på D'

$f(x,y) = (x^2 - y^2, x^3 y)$. $\therefore$ $f(1,1) = (0,1)$

$f'(x,y) = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 3x^2y & x^3 \end{pmatrix}$. $\therefore$ $f'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av $(1,1)$ och $\det f'(1,1) = 8 \neq 0$. Då ger Sats 28: f^{-1} har kont. partiella derivator i omgivning av $(u,v) = (0,1)$ och

$$(f^{-1})'(0,1) \overset{(14)}{=} (f'(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

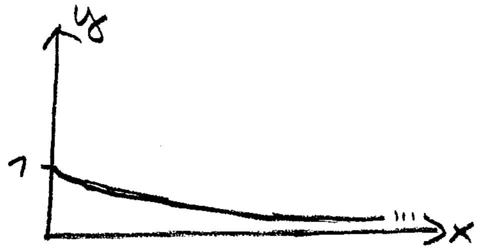
$$= \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Svar: $x'_u = \frac{1}{8}$, $x'_v = \frac{1}{4}$, $y'_u = -\frac{3}{8}$, $y'_v = \frac{1}{4}$.

Implicita funktioner av en variabel

För $x \geq 0$ definierar ekvationen

$$e^x y = 1$$

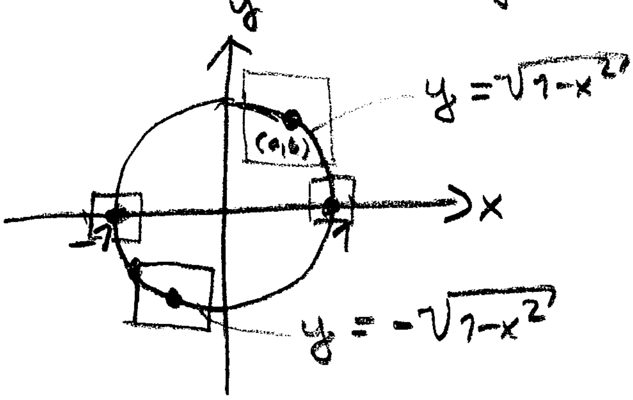


en nivåkurva i första kvadranten, som kan uttryckas som en funktion

$$y = f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Med andra ord definierar villkoret $e^x y = 1$ y som funktion av x.

Betrakta nu nivåkurvan $F(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.
Mot varje $x \in (-1,1)$ svarar två olika y-värden, så nivåkurvan utgör ingen funktionsgraf.
Men lokalt i en omgivning av varje punkt (a,b) på nivåkurvan med $a \neq \pm 1$ kan ~~ett~~ ett lågavsnitt av nivåkurvan uttryckas som en funktion:

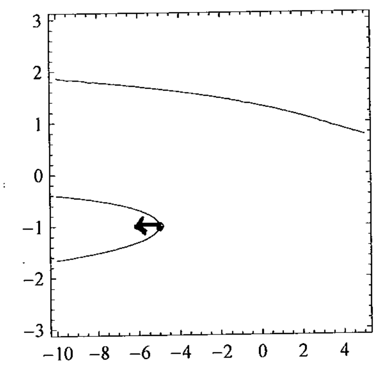


Däremot definierar ingen omgivning av $(-1,0)$ eller $(1,0)$ en funktion $y = f(x)$.
Observera att $\operatorname{grad} F(x,y) = (2x, 2y)$ är parallell med x-axeln i dessa punkter, $F'_y(\pm 1, 0) = 0$.

Nivåkurvan $F(x,y) = y^5 + xy - 4 = 0$ är för komplicerad för att vi skall kunna explicit lösa ut y som funktion av x i en omgivning av en given punkt (a,b) på kurvan. Då

$$F'_y(x,y) = 5y^4 + x = 0 \iff (x,y) = (-5,-1),$$

verkar det troligt att vi för punkter $(x,y) \neq (-5,-1)$ på kurvan kan hitta en omgivning där nivåkurvan implicit definierar en funktion $y=f(x)$, vilket styrks av nedanstående bild:



Tillräckliga villkor för att en ekvation, (nivåkurva), $F(x,y)=0$ lokalt definierar en entydigt bestämd funktion $y(x)$ sådan att $F(x,y(x))=0$ ges av existenssatsen för implicita funktioner:

Sats 29. Antag att $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av punkten $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, med $F(a,b)=0$ och $F'_y(a,b)\neq 0$.
Då finns en rektangel $D=\{(x,y): a_1<x<a_2,\ b_1<y<b_2\}$, $(a,b)\in D$, så att ekvationen $F(x,y)=0$ för alla x i $]a_1,a_2[$ har en entydigt bestämd lösning $y(x)$ i $]b_1,b_2[$, så att $y(x)$ är deriverbar i $]a_1,a_2[$ och

(15) $$F'_x(x,y(x)) + F'_y(x,y(x))\,y'(x) = 0.$$

<u>Anmärkning</u>: Formel (15) kallas <u>formeln för implicit derivering</u>, (av $F(x,y)=0$ med avseende på x).

<u>Bevis</u>: Definiera avbildningen G från xy-planet till uv-planet genom

$$(u,v) = G(x,y) = (x, F(x,y)),$$

<u>alltså</u>: $\begin{cases} u = x, \\ v = F(x,y). \end{cases}$

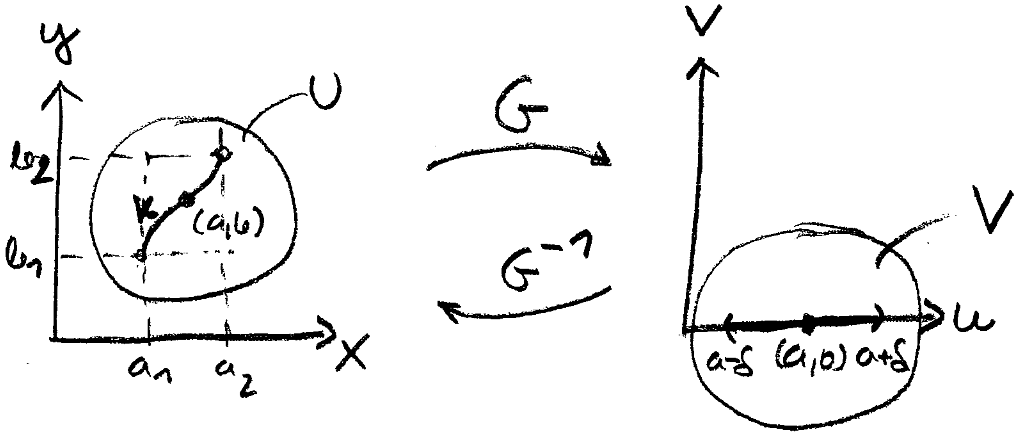
Då gäller: $(a,b) \xrightarrow{G} (a, F(a,b)) = (a,0)$ och

$$G'(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F'_x(a,b) & F'_y(a,b) \end{pmatrix}, \quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)}(a,b) = F'_y(a,b) \neq 0.$$

<u>Sats 28</u> ger att det existerar en omgivning U av (a,b) och en omgivning V av $(a,0)$, så att $G^{-1}: V \to U$ existerar och är kontinuerligt deriverbar i V. Då har G^{-1} formen

$$(*) \quad \begin{cases} x = u \\ y = H(u,v), \end{cases} \quad H \text{ kontinuerligt deriverbar.}$$

Avbildningen är definierad i V och speciellt i ett öppet intervall $(a-\delta, a+\delta)$ på u-axeln, som avbildas entydigt och omvändbart på en punktmängd K i U, (som är en kurva).



Enligt (*) har kurvan K ekvationen

$$\begin{cases} x = u, \\ y = H(u,0); \quad a-\delta < u < a+\delta. \end{cases}$$

<u>Sätt</u>: $y(x) := H(x,0)$, där $\underset{a_1}{\overset{\parallel}{a-\delta}} < x < \underset{a_2}{\overset{\parallel}{a+\delta}}$, som då är <u>kontinuerligt</u> <u>deriverbar</u>.

Nu är $v = F(x,y) = F(u, H(u,v))$ och

$$0 = F(u,H(u,0)) = F(x,H(x,0)) = F(x,y(x)),$$

Så $y(x)$ satisfierar ekvationen $F(x,y) = 0$ på intervallet $]a_1, a_2[$.

Derivering av $\varphi(x) = F(x,y(x)) = 0$ med avseende på x ger

$$0 = \varphi'(x) = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) = F'_x(x,y(x))\cdot 1 + F'_y(x,y(x))\cdot y'(x),$$

Vilket ger formel (15). □

<u>Exempel 62</u>. Betrakta igen nivåkurvan

$$F(x,y) = y^5 + xy - 4 = 0.$$

Punkten $(x,y) = (3,1)$ ligger på kurvan, $F(3,1) = 0$.

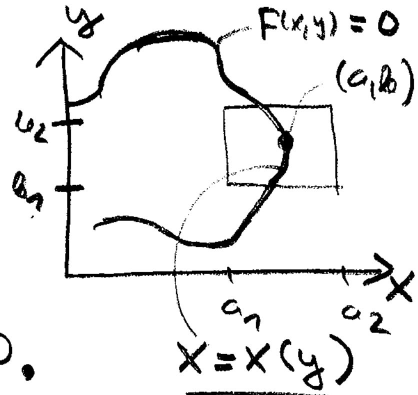
$F(x,y)$ är ett polynom som är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $(3,1)$ och

$$F'_y(x,y) = 5y^4 + x \implies F'_y(3,1) = 5\cdot 1 + 3 = 8 \neq 0.$$

Sats 29 ger att det finns en rektangel $D =]a_1,a_2[\times]b_1,b_2[$ så att $(3,1) \in D$ och så att $F(x,y) = 0$ har en entydigt bestämd lösning $y(x)$ i $]b_1,b_2[$ för alla $x \in]a_1,a_2[$.
Vidare ger formel (15) att: $(y(3) = 1)$

$$\underline{\underline{y'(3)}} = -\frac{F'_x(3,1)}{F'_y(3,1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}. \quad \left(F'_x(x,y) = y\right)$$

<u>Anmärkning till Sats 29</u>. Om $F'_y(a,b) = 0$, men $F'_x(a,b) \neq 0$, och alla andra antaganden i satsen är uppfyllda, så kan vi hitta en rektangel $D =]a_1,a_2[\times]b_1,b_2[$, så att $(a,b) \in D$ och så att $F(x,y) = 0$ för alla $y \in]b_1,b_2[$ har en entydigt bestämd lösning $x(y)$ i $]a_1,a_2[$, så att <u>$x(y)$ är deriverbar i $]b_1,b_2[$</u> och



$$(15') \quad F'_x(x(y),y)\cdot x'(y) + F'_y(x(y),y) = 0.$$

(Implicit derivering av $F(x,y) = 0$, med avseende på y).

Exempel 63. Fortfarande betraktas nivåkurvan

$$F(x,y) = y^5 + xy - 4 = 0.$$

Denna gång i punkten $(-5,-1)$, som enligt tidigare är en punkt där $F'_y(x,y) = 0$.

$F'_x = y$ och $F'_x(-5,-1) = -1 \neq 0$, så föregående anmärkning garanterar att $F(x,y)=0$ har en entydigt bestämd deriverbar lösning $x = x(y)$ i ett intervall $]b_1,b_2[$ innehållande $y=-1$. Men denna lösning ges ju explicit av

$$x = x(y) = \frac{1}{y}(4-y^5).$$

Anmärkning: Observera att Sats 29 endast ger tillräckliga villkor för att $F(x,y)=0$ lokalt definierar $y(x)$ entydigt. Exempelvis

$$F(x,y) = x^3 - y^3 = 0, \quad F(0,0) = 0,$$

är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $(0,0)$:

$F'_y = -3y^2$, $F'_y(0,0) = 0$, $(F'_x = 3x^2,\ F'_x(0,0) = 0)$, men $F(x,y) = 0$ definierar

$$y = y(x) = x, \quad (\text{och } x = x(y) = y)$$

Definition 26. Låt $F(x,y)=0$ definiera en nivåkurva och antag att F är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av en punkt (a,b) med $F(a,b)=0$. Då är (a,b) en reguljär punkt (ordinär punkt) på kurvan om $\nabla F(a,b) \neq \bar{0}$, dvs. $F'_x(a,b)\neq 0$ eller $F'_y(a,b) \neq 0$. Om $\nabla F(a,b)=\bar{0}$ är (a,b) en singulär punkt.

Sats 29 ger inte besked om kurvans utseende i närheten av en singulär punkt. Vi ger några exempel på hur en kurva kan se ut i sådana fall. Föregående anmärkning visade ett exempel där vi kunde bestämma $y=y(x)$ och $x=x(y)$ i en omgivning av $(0,0)$.

Exempel 64. (Isolerad punkt). Låt $F(x,y)=x^2+y^2-x^4=0$.

$F(0,0)=0 \Rightarrow (0,0)$ punkt på kurvan.

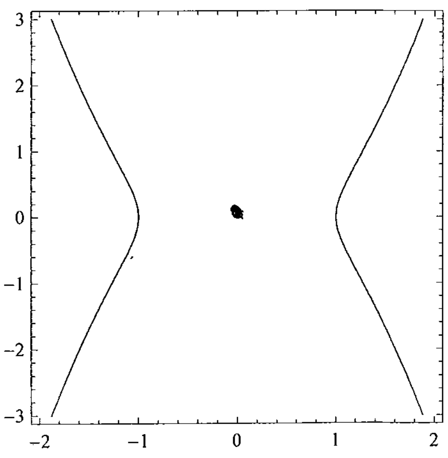
$$\begin{cases} F'_x(x,y) = 2x-4x^3, \\ F'_x(0,0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} F'_y(x,y) = 2y \\ F'_y(0,0) = 0 \end{cases} \qquad \therefore\ (0,0) \text{ singulär punkt.}$$

$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y^2 = x^4-x^2 = x^2(x^2-1)$

$\therefore\ 0 \leq y^2 = x^2(x^2-1)$

$\therefore$ För $x\in(-1,1)$ löser endast $x=0, y=0$ denna olikhet

$\therefore$ $(0,0)$ isolerad punkt på kurvan $F(x,y)=0$.



Exempel 65. (Dubbelpunkt). Betrakta nivåkurvan

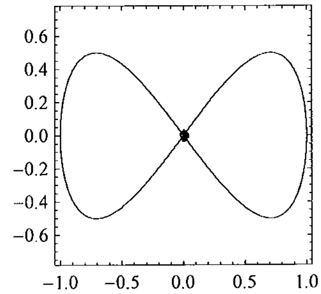
$$F(x,y) = x^2 - y^2 - x^4 = 0. \quad F(0,0) = 0.$$

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = 2x - 4x^3, \\ F'_x(0,0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F'_y(x,y) = -2y, \\ F'_y(0,0) = 0. \end{cases} \quad (0,0) \text{ singulär punkt.}$$

$F(x,y) = 0 \iff y^2 = x^2(1-x^2)$. Kurvan kan delas upp i två grenar: $\begin{cases} y_1(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)}, & x \in [-1,1], \\ y_2(x) = -\sqrt{x^2(1-x^2)}, & \text{— " —} \end{cases}$

med en dubbelpunkt i origo.

$F(x, y_1(x)) = 0$ och $F(x, y_2(x)) = 0$ i en omgivning av origo.

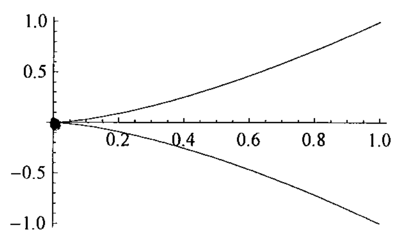


Exempel 66. $F(x,y) = x^3 - y^2 = 0. \quad F(0,0) = 0.$

$$\left.\begin{aligned} F'_x(x,y) &= 3x^2 \\ F'_y(x,y) &= -2y \end{aligned}\right\} \quad \therefore \; F'_x(0,0) = F'_y(0,0), \quad (0,0) \text{ singulär punkt.}$$

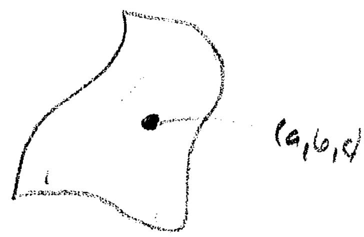
$F(x,y) = 0 \iff y^2 = x^3$. Kurvan kan delas upp i två grenar: $\begin{cases} y_1(x) = x^{3/2}, & x \geq 0, \\ y_2(x) = -x^{3/2}, & x \geq 0, \end{cases}$

som bildar en spets i origo.



Implicita funktioner av flera variabler

Antag att sambandet $F(x,y,z)=0$ definierar en yta sådan att $F(a,b,c)=0$, och att de partiella derivatorna F'_x, F'_y, F'_z är kontinuerliga i en omgivning av (a,b,c).



Antag vidare att $F'_z(a,b,c) \neq 0$.

Då är $z = z(x,y)$ i något rätblock D kring punkten (a,b,c),

$$D = \{(x,y,z) : a_1 < x < a_2,\ b_1 < y < b_2,\ c_1 < z < c_2\}$$

Då gäller

$$F(x,y,z(x,y)) = 0, \quad a_1 < x < a_2,\ b_1 < y < b_2,$$

och vi kan derivera implicit med avseende på x och y:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z(x,y))\cdot 1 + F'_z(x,y,z(x,y))\cdot z'_x(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y,z(x,y))\cdot 1 + F'_z(x,y,z(x,y))\cdot z'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Nu kan vi, (utan bevis), formulera en motsvarighet till Sats 29 för ~~ett~~ ekvationssystem

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Vi ger en motiverande geometrisk beskrivning