Gradient och riktningsderivata

För en funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som är kontinuerligt deriverbar i en punkt $\bar{a}$ figurerar alla partiella derivator av första ordning i begrepp som differentierbarhet och kedjeregeln. De beskriver i samverkan det lokala beteendet hos f. Vi sammanför därför de partiella derivatorna till begreppet gradient.

Definition 21. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{x}$. Då definieras gradienten av f i punkten $\bar{x}$ som

$$\operatorname{grad} f(\bar{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right).$$

Anmärkning 1. $\operatorname{grad} f(\bar{x})$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ och funktionen $\bar{x} \mapsto \operatorname{grad} f(\bar{x})$, betecknad $\operatorname{grad} f$, är ~~ett~~ n-dimensionellt vektorfält, $\operatorname{grad} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Anmärkning 2. Ofta används beteckningen $\nabla f(\bar{x})$ för $\operatorname{grad} f(\bar{x})$, där symbolen ∇ utläses "nabla".

Exempel 46. För polynomet $f(x,y,z) = x^2yz - 2xz^2$ är

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2xyz - 2z^2,\ x^2 z,\ x^2 y - 4xz) = \nabla f(x,y,z).$$

Exempel 47. För $f(\bar{x}) = |\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, har vi de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{|\bar{x}|}.$$

Gradienten ges av

$$\operatorname{grad} f(\bar{x}) = \left(\frac{x_1}{|\bar{x}|}, \ldots, \frac{x_n}{|\bar{x}|} \right) = \frac{1}{|\bar{x}|}\, \bar{x}.$$

Anmärkning 3. Differentierbarhetskravet uttryckt med gradienten blir

$$f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) h_j + |\bar{h}|\, \rho(\bar{h})$$
$$= \operatorname{grad} f(\bar{x}) \bullet \bar{h} + |\bar{h}|\, \rho(\bar{h}),$$

där $\rho(\bar{h}) \to 0$, då $\bar{h} \to \bar{0}$.

Kedjeregeln för derivering av $f(g(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ uttryckt med gradienten:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\, g_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))\, g_n'(t)$$
(7)
$$= \operatorname{grad} f(g(t)) \bullet g'(t),$$

där $g'(t) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t))$.

Vi ser från formlerna i denna anmärkning att $\operatorname{grad} f(\bar{x})$ spelar en roll för funktioner av flera variabler som är analog med derivatans roll för funktioner av en variabel.

Följande sats ger analogin till att om en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har derivatan $f'(x) = 0$ i ett intervall så är den konstant på intervallet.

Sats 27. Antag att $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en öppen och sammanhängande mängd, samt att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator i D. Om $\operatorname{grad} f(\bar{x}) = \bar{0}$ för alla $\bar{x} \in D$, så är f konstant i D.

Bevis: Välj en fix punkt $\bar{a}$ och en godtycklig punkt $\bar{y}$ i D. Mängden D är sammanhängande, så det finns en kontinuerlig kurva $x(t)$ i D, med $x(\alpha) = \bar{a}$ och $x(\beta) = \bar{y}$, då $\alpha \le t \le \beta$. (Definition 9). Då D är öppen kan man välja $x(t)$ så att den har kontinuerlig derivata, dvs. $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ har kontinuerliga derivator då $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. (Detta visas ej), Kedjeregeln (7) ger:

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \operatorname{grad} f(x(t)) \cdot x'(t) = \bar{0} \cdot x'(t) = 0,$$

för alla t med $\alpha < t < \beta$. Då $f(x(t))$ är kontinuerlig i α och β erhålls att $f(x(t)) = C =$ konstant, då $\alpha \le t \le \beta$, och speciellt att $f(\bar{y}) = f(\bar{a})$. $\square$

Exempel 48. Är $f(x,y,z) = (y^2 - z, 2xy, 3z^2 - x)$ gradient till någon funktion $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$?

Lösning: $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - z \Rightarrow F(\bar{x}) = y^2 x - zx + H_1(y,z)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yx + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 2xy \Rightarrow H_1(y,z) = H_2(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -x + H_2'(z) = 3z^2 - x \Rightarrow H_2'(z) = 3z^2 \Rightarrow H_2(z) = z^3 + k$$

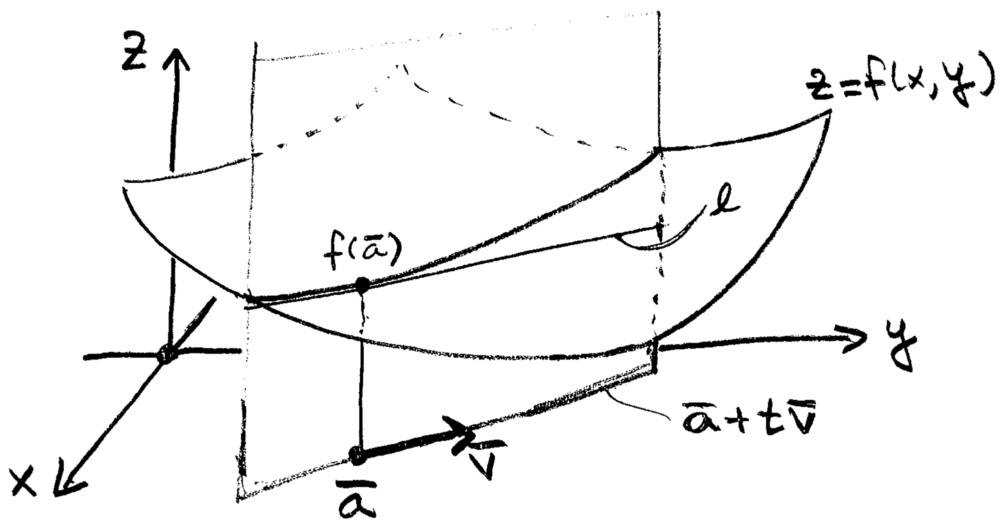
Svar: Ja, $F(\bar{x}) = y^2 x - zx + z^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$.

De partiella derivatorna beskriver hur snabbt $f(\bar{x})$ ändras då $\bar{x}$ rör sig parallellt med någon koordinataxel. Nu undersöker vi tillväxten av $f(\bar{x})$ i en punkt $\bar{a}$ längs en given rät linje $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{v}$ genom $\bar{a}$. Antag att $\bar{v}$ är en normerad riktningsvektor, $|\bar{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 1$. Då mäter parametern t avståndet från $\bar{a}$ längs linjen.

Definition 22. Med riktningsderivatan av $f(\bar{x})$ i punkten $\bar{a}$ svarande mot riktningen $\bar{v}$, $|\bar{v}|=1$, avses gränsvärdet

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{a}+t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}.$$

Anmärkning. Om $\bar{v} = \bar{e}_j = (0,\dots,0,\underset{\text{komp. } j}{1},0,\dots,0)$ så är $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = f'_{j}(\bar{a})$. Vidare inses lätt att $f'_{-\bar{v}}(\bar{a}) = -f'_{\bar{v}}(\bar{a})$.



Geometriska tolkningen i $\mathbb{R}^2$ av riktningsderivata $f'_{\bar{v}}(\bar{a})$: riktningskoefficienten till tangenten l.

Vanligen använder man grad f($\bar{a}$) för att beräkna riktningsderivator, med stöd av följande sats.

Sats 22. Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a}$ och $\bar{v}$ är en riktningsvektor med $|\bar{v}| = 1$, så existerar $f'_{\bar{v}}(\bar{a})$ och ges av:

$$(8) \qquad f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{v}.$$

Bevis: Funktionen $\varphi(t) = f(\bar{a} + t\bar{v})$ är f:s restriktion till linjen $\bar{a} + t\bar{v}$. Enligt kedjeregeln (7) är $\varphi'(t) = \operatorname{grad} f(\bar{a} + t\bar{v}) \cdot \bar{v}$, så $\varphi'(0) = \operatorname{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{v}$. Men nu är ju

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) = \operatorname{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{v},$$

och beviset är klart.

Exempel 49. Bestäm för $f(x,y) = x^2 + y^2$ riktningsderivatan i punkten $\bar{a} = (1,1)$ längs riktningen $(1,2)$.

Lösning: Vi har då $\operatorname{grad} f(\bar{x}) = (2x, 2y)$ och $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = (2,2)$. Riktningen $(1,2)$ måste normeras:

$$\bar{v} = \frac{(1,2)}{|(1,2)|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2).$$ Formel (8) ger:

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,2) \cdot (1,2)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2+4) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Sats 23. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a}$. Då är $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = 0$ i de riktningar som är vinkelräta mot $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$. Vektorn $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast och mätetalet på den maximala tillväxthastigheten är $|\operatorname{grad} f(\bar{a})|$.

Bevis: Enligt formel (8) är $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{v}$, så $f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = 0$ i de riktningar $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \perp \bar{v}$.

Med stöd av Sats 1, (Cauchy-Schwartz' olikhet):

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{v} \leq |\operatorname{grad} f(\bar{a}) \cdot \bar{v}| \leq |\operatorname{grad} f(\bar{a})|\,|\bar{v}| = |\operatorname{grad} f(\bar{a})|.$$

Likhet fås då $\operatorname{grad} f(\bar{a})$ och $\bar{v}$ är parallella och likariktade, dvs.

$$\bar{v} = \frac{1}{|\operatorname{grad} f(\bar{a})|} \operatorname{grad} f(\bar{a}).$$

Riktningsderivatan $f'_{\bar{v}}(\bar{a})$ är maximal i gradientens riktning med det maximala värdet $|\operatorname{grad} f(\bar{a})|$. □

Anmärkning. I riktningen $-\operatorname{grad} f(\bar{a})$ är riktningsderivatan som minst och funktionsvärdet avtar snabbast.

Exempel 50. Låt $f(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$ beskriva temperaturen i ~~ett~~ område i $\mathbb{R}^3$ innehållande punkten $(1,1,1)$. I vilken riktning ökar temperaturen snabbast i denna punkt och hur stor är ökningen / längdenhet?

Lösning: Vi har $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{-2xz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2yz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2z}{x^2+y^2} \right)$

så $\operatorname{grad} f(1,1,1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, vilket enligt Sats 23 är den (onormerade) riktningen för maximal temperaturökning. Ökningen / längdenhet ges av

$$|\operatorname{grad} f(1,1,1)| = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Nivåkurvor, nivåytor och tangentplan

Definition 23. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Punktmängden $\{(x,y) : f(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}\}$ kallas (om den är icke-tom) en nivåkurva till f.
Punktmängden $\{(x,y,z) : g(x,y,z) = c,\ c \in \mathbb{R}\}$ kallas (om den är icke-tom) en nivåyta till g.

På väderlekskartor används nivåkurvor för temperaturen, isotermer, och för lufttrycket, isobarer. På vanliga kartor anger nivåkurvor höjden över havet, höjdlinjer.

Vi skall nu undersöka gradientens geometriska betydelse i samband med nivåytor och nivåkurvor. Antag då att $z = f(x,y)$ är kontinuerligt deriverbar i en punkt $\bar{a} = (a,b)$ på nivåkurvan $f(x,y) = C$. (Då gäller ju $f(\bar{a}) = C$). Låt nivåkurvan ha en parameterframställning

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \end{cases}$$

med $(x(t_0), y(t_0)) = (a,b) = \bar{a}$. På $[\alpha, \beta]$ gäller $f(x(t), y(t)) = C$, så derivatan av f med avseende på t är noll för $t \in [\alpha, \beta]$. Kedjeregeln ger:

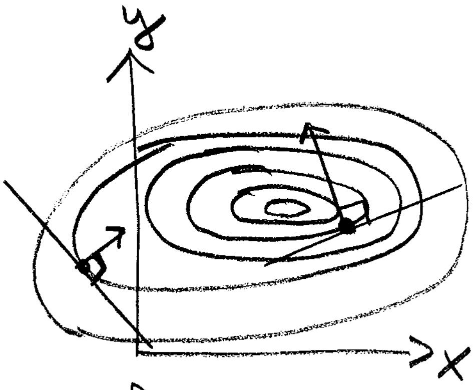
$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) = 0,$$

och speciellt för $t = t_0$: $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \bullet (x'(t_0), y'(t_0)) = 0$.

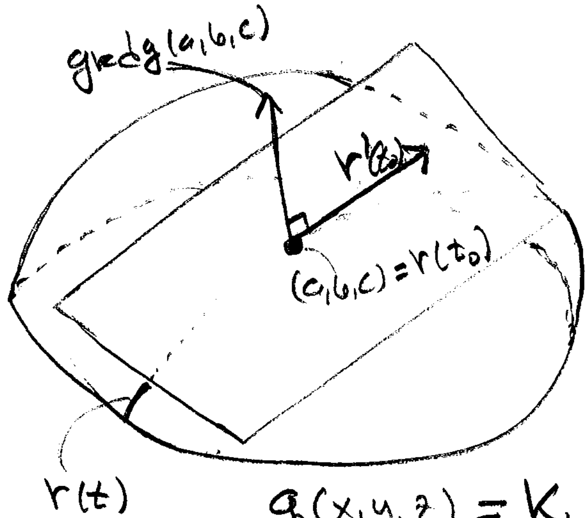
Då $(x'(t_0), y'(t_0))$ ger nivåkurvans tangentriktning i $\bar{a}$ så är $\operatorname{grad} f(\bar{a})$, om den är olika $\bar{0}$, vinkelrät mot kurvans tangent i $\bar{a} = (a,b)$.

För en funktion $g(x,y,z)$ av tre variabler kan man på ~~att~~ analogt sätt inse att grad $g(a,b,c)$ är vinkelrät mot tangenten till varje kurva i nivåytan $g(x,y,z) = k$ som går igenom punkten (a,b,c). Alla dessa tangenter bildar nivåytans tangentplan i (a,b,c) och gradienten grad $g(a,b,c)$ anger nivåytans normalriktning.

Sats 24. Antag att $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbara i punkten $\bar{a} = (a,b)$ respektive $\bar{a} = (a,b,c)$. Då är $\operatorname{grad} f(a,b)$ normalvektor i punkten (a,b) till den nivåkurva som går igenom (a,b), och $\operatorname{grad} g(a,b,c)$ är normalvektor i punkten (a,b,c) till nivåytan som går igenom (a,b,c).



$f(x,y) = C$



$g(x,y,z) = K$

Sats 24 möjliggör bestämning av tangenter till nivåkurvor och tangentplan till nivåytor på ett bekvämt sätt. Om kurvan $f(x,y)=C$ parametriseras med $r = r(t)$, $r(t_0) = (a,b)$, så har tangenten ekvationen $(x,y) = r(t_0) + u \cdot r'(t_0)$, alltså $u \cdot r'(t_0) = (x-a, y-b)$ och denna vektor är vinkelrät mot $\operatorname{grad} f(a,b)$, så skalärprodukten är noll:

$$(9) \quad f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = 0,$$

vilket ger tangentens ekvation.

Analogt får vi <u>tangentplanets ekvation</u> i punkten (a,b,c) på nivåytan $g(x,y,z) = k$ genom att betrakta en kurva $r(t)$ på nivåytan som går igenom $(a,b,c) = r(t_0)$. Tangenten har ekvationen $(x,y,z) = r(t_0) + u \cdot r'(t_0)$ och vektorn $u r'(t_0) = (x-a,\, y-b,\, z-c)$ är vinkelrät mot $\operatorname{grad} g(a,b,c)$, med skalärprodukt noll;

$$(10)\quad g'_x(a,b,c)(x-a) + g'_y(a,b,c)(y-b) + g'_z(a,b,c)(z-c) = 0,$$

vilket ger <u>tangentplanets ekvation</u>.

<u>Exempel 51</u>. Bestäm tangenten till ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{i punkten} \quad \left(\sqrt{2}, \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

<u>Lösning</u>: Ellipsen är nivåkurva till $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$. Då är $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right)$ och enligt (9) ges tangentens ekvation av

$$f'_x\left(\sqrt{2}, \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)(x-\sqrt{2}) + f'_y\left(\sqrt{2}, \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(y - \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{3\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y - 12 = 0}.$$

<u>Exempel 52</u>. Bestäm tangentplanet till hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=-1$ i punkten $(1,1,\sqrt{3})$.

<u>Lösning</u>: Hyperboloiden är nivåyta till $g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$,

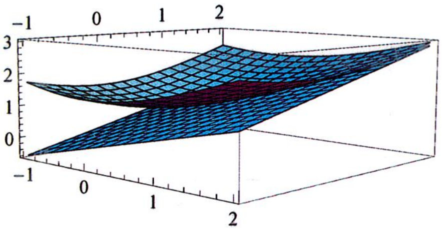
$\text{grad}\, g(x,y,z)=(2x,2y,-2z)$, $\text{grad}\, g(\underbrace{1,1,\sqrt{3}}_{=\bar{a}})=(2,2,-2\sqrt{3})$.

<u>Tangentplanet ges av (10)</u>:

$$g'_x(\bar{a})(x-1)+g'_y(\bar{a})(y-1)+g'_z(\bar{a})(z-\sqrt{3})=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2(x-1)+2(y-1)-2\sqrt{3}(z-\sqrt{3})=0$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{x+y-\sqrt{3}z+1=0}.$$



<u>Anmärkning</u>: För en funktionsyta $z=f(x,y)$ i en punkt $(a,b,f(a,b))$ har vi tidigare, sida 67, bestämt tangentplanet genom:

$$z=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b).$$

Funktionsytan kan tolkas som en nivåyta till g:

$$g(x,y,z)=f(x,y)-z=0,$$

med $\text{grad}\, g=(f'_x,f'_y,-1)$. Då ger formel (10):

$$f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)+(-1)(z-f(a,b))=0$$

för tangentplanet genom $(a,b,f(a,b))$, vilket överensstämmer med vår tidigare formel.

Differentialkalkyl för avbildningar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Linjära avbildningar och funktionalmatrisen

Definition 24. Avbildningen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning om

$$f(\bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \quad \text{och} \quad f(c\bar{x}) = cf(\bar{x}),$$

för alla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ och $c \in \mathbb{R}$.

Anmärkning. En linjär avbildning f avbildar räta linjer i $\mathbb{R}^n$ på räta linjer i $\mathbb{R}^m$. En punkt $x = a + tb$ på en linje i $\mathbb{R}^n$ avbildas på

$$f(x) = f(a+tb) = f(a) + tf(b),$$

som är en punkt på linjen $y = f(a) + t\cdot f(b)$ i $\mathbb{R}^m$.

Låt $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ vara den naturliga basen i $\mathbb{R}^n$, $\bar{e}_j = (0,0,\dots,0,\underset{\text{komp. } j}{1},0,\dots,0)$ och $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ den naturliga basen i $\mathbb{R}^m$, $\bar{v}_k = (0,\dots,0,\overset{\text{k:te komp.}}{1},0,\dots,0)$.

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{e}_k \in \mathbb{R}^n. \quad f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(\bar{e}_k), \ \text{f linjär}.$$

$$f(\bar{e}_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \bar{v}_i, \quad k = 1, \dots, n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisen för f, med avseende på baserna $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ och $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$.

Den linjära avbildningen $\overline{y} = f(\overline{x})$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ har då matris-framställningen:

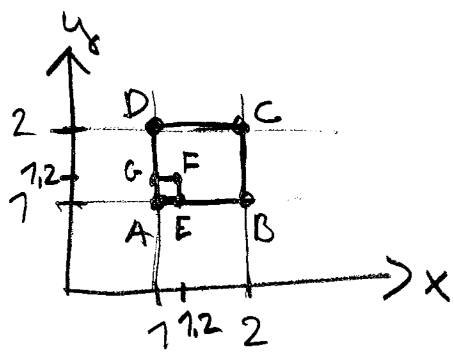
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

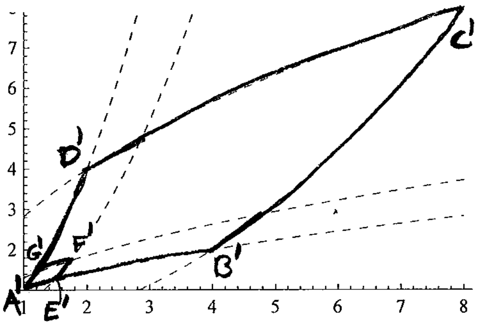
Följande resultat är bekanta från kursen i Matriser:

1. Om $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjära avbildningar med matriserna A respektive B, och $k \in \mathbb{R}$, så är kf, $f+g$, $f-g$ linjära avbildningar med matriser kA, $A+B$, $A-B$.
2. Om $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ linjär med matris A och $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linjär med matris B så är $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linjär med matris AB.
3. Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är linjär med matris A, så har f en invers om och endast om A är inverterbar. $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är då linjär med matris A^{-1}.

En linjär avbildning $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v)=f(x,y)$, avbildar **linjer** i xy-planet på linjer i uv-planet och rektanglar på parallellogrammer, (som kan vara rektanglar). En icke-linjär avbildning har inte denna egenskap globalt, men lokalt avbildas "tillräckligt små rektanglar" i xy-planet på en "parallellogramaktig figur" i uv-planet.

Exempel 53. Betrakta avbildningen $(x,y) \to (u,v)=(x^2y, xy^2)$ från xy-planet till uv-planet. Betrakta bilden av en kvadrat och en "liten kvadrat" i xy-planet:





$$\begin{cases} x=1 \text{ avbildas på } v=u^2,\ x=2 \text{ avbildas på } v=\dfrac{u^2}{8}, \\ y=1 \text{ — " — } v=\sqrt{u},\ y=2 \text{ — " — } v=\sqrt{8u}, \\ x=1{,}2 \text{ — " — } v=\dfrac{u^2}{(1{,}2)^3},\ y=1{,}2 \text{ — " — } v=\sqrt{(1{,}2)^3 u}. \end{cases}$$

(Kolla!)

Lokalt kan en icke-linjär avbildning $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ approximeras med en linjär avbildning. För detta ändamål införs funktionalmatrisen i följande definition.

Definition 24. Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en avbildning med komponentfunktionerna $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$. Antag att partiella derivatorna $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$, $1 \le j \le m$, $1 \le k \le n$, existerar i punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Då betecknas funktionalmatrisen, (Jacobimatrisen, totala derivatan) med $f'(\bar{a})$ och definieras av:

$$f'(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

Anmärkning: För en avbildning $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ blir $f'(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right)$, vilket kan tolkas som $\operatorname{grad} f(\bar{a})$ skriven som en radvektor.

För en vektorvärd funktion av en variabel, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ blir $f'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$, tangentvektorn skriven som en kolonnmatris.

<u>Sats 25</u>. Antag ~~att~~ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har komponentfunktionerna $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$, $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, och att <u>varje komponentfunktion</u> f_j <u>är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a}$</u>. Då är f <u>differentierbar i punkten $\bar{a}$</u>, vilket betyder ~~att~~

$$(11)\quad f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = f'(\bar{a})\bar{h} + |\bar{h}|\,\rho(\bar{h}),$$

med feltermen $\rho(\bar{h}) \to \bar{0}$, då $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n) \to \bar{0}$, och $|\bar{h}|\rho(\bar{h}) = |\bar{h}|(\rho_1(\bar{h}), \ldots, \rho_m(\bar{h}))$.

<u>Anmärkning</u>: Funktionen $\bar{h} \to f'(\bar{a})\bar{h}$, där h uppfattas som kolonnmatris, är en linjär avbildning som kan kallas <u>lineariseringen av f i punkten $\bar{a}$</u> eller <u>differentialen av f i punkten $\bar{a}$</u>, betecknad $df(\bar{a})$.

<u>Bevis</u>: (Fallet $n = 2, m = 3$. Analogt bevis för andra fall).
Med stöd av Satserna 18, 19 och Definition 19:

$$\begin{cases} \Delta f_1 = f_1(\bar{a}+\bar{h}) - f_1(\bar{a}) = h_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) + h_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) + |\bar{h}|\,\rho_1(\bar{h}), \\ \Delta f_2 = f_2(\bar{a}+\bar{h}) - f_2(\bar{a}) = h_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) + h_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) + |\bar{h}|\,\rho_2(\bar{h}), \\ \Delta f_3 = f_3(\bar{a}+\bar{h}) - f_3(\bar{a}) = h_1 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{a}) + h_2 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{a}) + |\bar{h}|\,\rho_3(\bar{h}), \end{cases}$$

där $\rho_i(\bar{h}) \to 0$, då $\bar{h} \to \bar{0}$, $i = 1, 2, 3$.

Skrivet i matrisform, med beteckningen
$\Delta f = f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a})$,

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |\bar{h}| \begin{pmatrix} \rho_1(\bar{h}) \\ \rho_2(\bar{h}) \\ \rho_3(\bar{h}) \end{pmatrix}$$

$$= f'(\bar{a})\,\bar{h} + |\bar{h}|\,\rho(\bar{h}),$$

och $\rho_i(\bar{h}) \to 0$ då $\bar{h} \to \bar{0}$ medför att $\rho(\bar{h}) \to \bar{0}$,
då $\bar{h} \to \bar{0}$. □

<u>Exempel 54</u>. a) <u>Polära koordinater</u>. Avbildningen
$(r,\theta) \xrightarrow{f} (x,y) = (\underbrace{r\cos\theta}_{f_1(r,\theta)}, \underbrace{r\sin\theta}_{f_2(r,\theta)})$, har funktionalmatrisen:

$$f'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

b) <u>Sfäriska koordinater</u>. $(r,\theta,\varphi) \xrightarrow{f} (\overset{x}{\underbrace{r\sin\theta\cos\varphi}_{f_1(r,\theta,\varphi)}}, \overset{y}{\underbrace{r\sin\theta\sin\varphi}_{f_2(r,\theta,\varphi)}}, \overset{z}{\underbrace{r\cos\theta}_{f_3(r,\theta,\varphi)}})$
har funktionalmatrisen:

$$f'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Kedjeregeln i allmän matrisform

Sats 26. Antag att $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, (komponentfunktionerna $g_1, \ldots, g_p$ kontinuerligt deriverbara), och att $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $g(\bar{a}) \in \mathbb{R}^p$, (komponentfunktionerna $f_1, \ldots, f_m$ kontinuerligt deriverbara). Då är sammansättningen $f \circ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentierbar i $\bar{a}$ med funktionalmatris

$$(12) \quad (f \circ g)'(\bar{a}) = f'(g(\bar{a}))\, g'(\bar{a}).$$

Anmärkning: Produkten i högerled av (12) är en matrisprodukt av formen "$(m \times p) \times (p \times n) = (m \times n)$". Alla tidigare kedjeregler är specialfall av (12).

Bevis: Den i:te komponentfunktionen i $(f \circ g)(\bar{x})$ ges av

$$(*) \quad f_i(g_1(\bar{x}), \ldots, g_p(\bar{x})), \quad \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Beteckna variablerna för f_i med $y_1, \ldots, y_p$, $f_i(y_1, \ldots, y_p)$. Vi har då partiella derivatorna $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial y_p}$. Funktionen $(*)$ har en partiell derivata med avseende på x_k i punkten $\bar{a}$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(g(\bar{a}))\frac{\partial g_1}{\partial x_k}(\bar{a}) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_p}(g(\bar{a}))\frac{\partial g_p}{\partial x_k}(\bar{a})$$

Detta är enligt definitionen på matrisprodukt elementet på plats (ik) i matrisen $f'(g(\bar{a}))\,g'(\bar{a})$, och formel (12) stämmer. För att påvisa differentierbarheten för $f \circ g$ i punkten $\bar{a}$ krävs uppskattningar som involverar matris-normer, se kursboken. $\square$

Exempel 55. En rymdkurva skär xy-planet under rät vinkel i punkten $(2,1,0)$. Bestäm tangentens ekvation i motsvarande punkt för kurvans bild under avbildningen $u = x+y+z$, $v = x^2-y^2$, $w = xyz$.

Lösning: Kurvan ges av
$$g(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$g'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Vidare gäller:
$$\begin{cases} g(t_0) = (2,1,0), \\ g'(t_0) = (0, 0, z'(t_0)). \end{cases}$$

Sätt:
$$f(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$
$$f(g(t)) = (u(g(t)), v(g(t)), w(g(t)))$$
$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & -2y & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$
$$f'(g(t_0)) = f'(2,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (f \circ g)'(t_0) = f'(g(t_0))\,g'(t_0)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z'(t_0) \end{pmatrix} = (z'(t_0), 0, 2z'(t_0))^T$$
$$= z'(t_0)\,(1, 0, 2)^T$$

$\therefore$ Tangentens ekvation:

$$f(g(t_0)) + r(1,0,2), \quad -\infty < r < \infty.$$

Funktionaldeterminanter

Antag nu att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Då är funktionalmatrisen f' en kvadratisk $n \times n$ matris och vi kan beräkna dess determinant, som också är viktig för att studera f:s lokala egenskaper.

Definition 25. Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{y} = f(\bar{x}) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))$. Talet

$$\det f'(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

kallas funktionaldeterminanten eller Jacobis determinant av funktionen $\bar{y} = f(\bar{x})$, och betecknas: $\frac{d(f)}{d(\bar{x})}$, $\frac{d(f_1,\dots,f_n)}{d(x_1,\dots,x_n)}$, $\frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})}$, $\frac{d(y_1,\dots,y_n)}{d(x_1,\dots,x_n)}$ eller ibland $J(\bar{x})$.

Exempel 56. a) Avbildningen $f(r,\theta) = (\overset{f_1}{r\cos\theta}, \overset{f_2}{r\sin\theta})$ har funktionalmatris $f'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ och funktionaldeterminant:

$$\underline{\underline{\frac{d(f_1,f_2)}{d(r,\theta)}}} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{\underline{r}}.$$

b) Avbildningen $f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

har funktionalmatris:

$$f'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

och funktionaldeterminant:

$$\underline{\underline{\frac{d(f_1,f_2,f_3)}{d(r,\theta,\varphi)}}} = \det f'(r,\theta,\varphi) = \text{(bryt ut } r \text{ ur kolonn 2 och 3, utveckla efter sista raden)}$$

$$= r^2\left[\cos\theta(\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sin\theta(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi)\right]$$
$$= r^2(\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta) = \underline{\underline{r^2\sin\theta}}.$$

Funktionaldeterminanterna i a) och b) kommer att användas vid variabelbyten i dubbel- och trippelintegraler.

<u>Sats 27</u>. Antag att $\bar{y} = f(\bar{x})$ och $\bar{x} = g(\bar{z})$, $f,g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Då gäller:

$$\det(f\circ g)' = \det f' \cdot \det g',$$

vilket kan skrivas

$$\frac{d(\bar{y})}{d(\bar{z})} = \frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})} \cdot \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{z})}.$$

<u>Bevis</u>: Enligt Sats 26 är $(f\circ g)' = f'g'$. Då determinanten av en produkt är produkten av determinanterna erhålls: $\det(f\circ g)' = \det(f'g') = \det f' \cdot \det g'$. $\square$

Antag att $\bar{y} = f(\bar{x})$ är bijektiv med inversen $\bar{x} = g(\bar{y})$. Då är $f \circ g$ = Identiska avbildningen, och $(f \circ g)' = I$ = enhetsmatrisen med $\det I = 1$. Då ger Sats 27 att

$$1 = \det f'(\bar{x}) \cdot \det g'(\bar{y}) = \frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})} \cdot \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})}$$

och vi har formeln

$$(13) \qquad \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})} = \frac{1}{\frac{d(\bar{y})}{d(\bar{x})}},$$

som uttrycker att <u>inversens funktionaldeterminant är lika med det inverterade värdet av funktionens funktionaldeterminant.</u>

<u>Exempel 57</u>. Vid övergång från rätvinkliga till polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, har vi enligt Ex. 56 a) att

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r.$$

För det inversa koordinatbytet gäller:

$$\frac{d(r,\theta)}{d(x,y)} = \frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$