Differentialkalkyl för avbildningar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Partiella derivator

Vid undersökning av en funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ av n variabler kan man undersöka hur varje variabel påverkar funktionen då de övriga hålls som fixa konstanter. Vi betraktar n olika funktioner av en variabel:

$$x_j \to f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Derivatan är det viktigaste hjälpmedlet att studera det lokala beteendet hos en funktion av en variabel.

Definition 16. Låt $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ vara en inre punkt i definitionsmängden D_f till $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

existerar, så säger vi ~~att~~ f är partiellt deriverbar med avseende på variabeln x_j i punkten $\bar{a}$. Gränsvärdet kallas den partiella derivatan med avseende på x_j av f i punkten $\bar{a}$.

Beteckningar: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a})$, $f'_{x_j}(\bar{a})$, $f'_j(\bar{a})$.

För en partiellt deriverbar funktion f utgör

$$\bar{x} \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

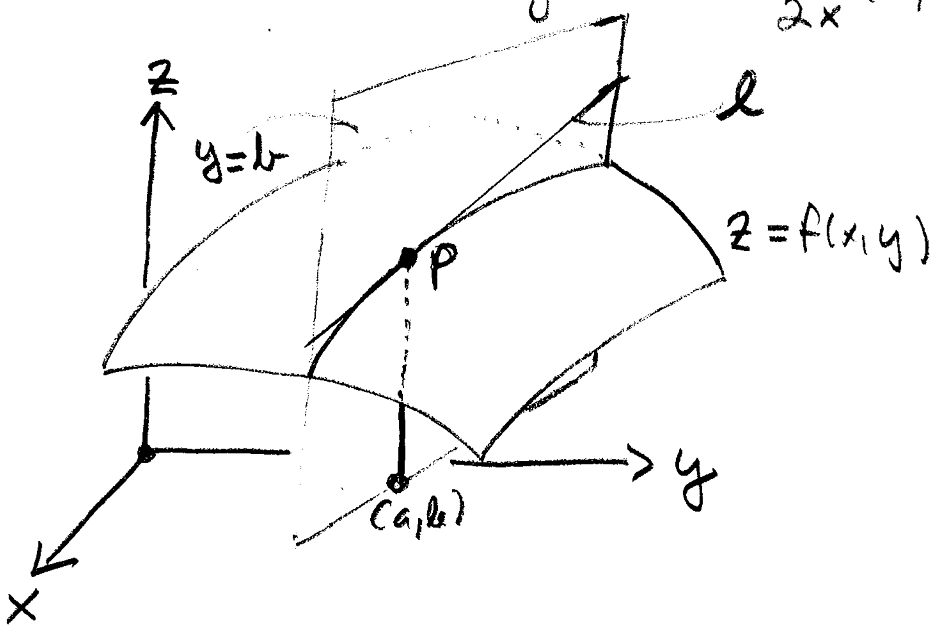
nya funktioner som betecknas $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, f'_{x_j} eller f'_j.

Om alla partiella derivator $f'_{x_j}(\bar{a})$, $j=1,\ldots,n$, existerar säges f vara partiellt deriverbar i punkten $\bar{a}$. Vi säger att f är partiellt deriverbar om den är partiellt deriverbar i varje punkt i D_f.

Om $z=f(x,y)$ är partiellt deriverbar i (a,b):

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \\[2ex] z'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \end{cases}$$

Den geometriska tolkningen av $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$:



$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ kan tolkas som riktningskoefficienten för tangenten l som går igenom $P=f(a,b)$ och ligger i planet $y=b$, dvs riktningskoefficienten till tangenten för $z=f(x,b)$ i punkten $x=a$.

Vid beräkning av partiella derivator till $f(x_1,\dots,x_n)$ betraktar man i tur och ordning alla utom en variabel som konstanter och deriverar med avseende på variabeln enligt regler från envariabelanalysen.

Exempel 34. För polynomet $f(x,y,z) = x^2y - zy + z^2x$ har vi

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 2xy + z^2, \\ f'_y(x,y,z) = x^2 - z, \\ f'_z(x,y,z) = -y + 2zx. \end{cases}$$

f'_x och f'_y kallas partiella derivator av första ordningen. Om de i sin tur kan deriveras partiellt erhålls partiella derivator av andra ordningen, dessa betecknas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

Observera ordningsföljden i de blandade fallen, exempelvis $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} \; (=(f'_x)'_y)$.

Partiella derivator av högre ordning definieras analogt, exempelvis:

$$f'''_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z} f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}.$$

Exempel 35. För $f(x,y,z)$ i Exempel 34 erhölls

$$f'_x = 2xy + z^2, \quad f'_y = x^2 - z, \quad f'_z = -y + 2zx.$$ Då är

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2y, & f''_{xy} = 2x, & f''_{xz} = 2z, \\ f''_{yx} = 2x, & f''_{yy} = 0, & f''_{yz} = -1, \\ f''_{zx} = 2z, & f''_{zy} = -1, & f''_{zz} = 2x. \end{cases}$$

(Observerar att $f''_{xy} = f''_{yx}$, $f''_{xz} = f''_{zx}$, $f''_{yz} = f''_{zy}$).

Definition 17. Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är $\underline{r}$ gånger deriverbar i $\bar{a}$, om $f^{(s)}_{k_1 k_2 \dots k_s}(\bar{a})$ existerar för varje $s \le r$ och varje kombination $k_1 k_2 \dots k_s$ ur $\{x_1, \dots, x_n\}$. f är $\underline{r}$ gånger kontinuerligt deriverbar i $\bar{a}$ om $f^{(s)}_{k_1 \dots k_s}(\bar{x})$ existerar i en omgivning av $\bar{a}$ för alla $s \le r$ och alla dessa derivator är kontinuerliga i $\bar{a}$.

Definition 18. En partiell differentialekvation (PDE) (i två variabler) av 1:a ordningen är av formen

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

och av 2:a ordningen:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Exempel 36. Låt $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion. Om vi definierar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genom

$$z = f(x,y) = g(xy),$$

så är f en lösning till den partiella diff. ekvationen

$$x \cdot z'_x - y \cdot z'_y = 0$$

ty

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{d}{dx} g(xy) = y\, g'(xy), \\ z'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{d}{dy} g(xy) = x\, g'(xy), \end{cases}$$

ger att

$$x \cdot z'_x - y \cdot z'_y = xy\, g'(xy) - yx\, g'(xy) = 0.$$

Sats 16. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är 2 gånger kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in D_f$. (Partiella derivatorna av **ordning** 1 och 2 existerar i omgivning av $\bar{a}$ och är **kontinuerliga** i $\bar{a}$). Då gäller:

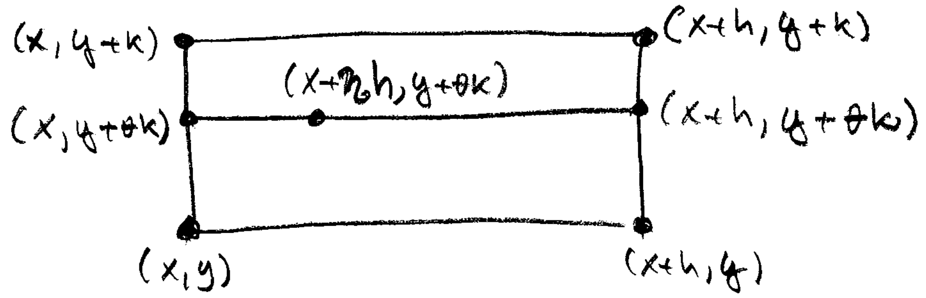
$$f''_{jk} = f''_{kj}, \quad j,k \in \{1, \dots, n\}.$$

Bevis: Påståendet i satsen gäller två variabler i gången, så vi kan anta att $n=2$, och visa att $f''_{xy} = f''_{yx}$ för $f(x,y)$.

Låt (x,y) vara en fix punkt i D_f och betrakta uttrycket:

$$q(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x,y)$$

$$q(h,k) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x,y)$$



Sätt: $\varphi(t) = f(x+h, t) - f(x,t)$, $\psi(s) = f(s, y+k) - f(s,y)$.

Vi har: $q(h,k) = \varphi(y+k) - \varphi(y)$ och $q(h,k) = \psi(x+h) - \psi(x)$,
samt $\varphi'(t) = f'_y(x+h,t) - f'_y(x,t)$. Medelvärdessatsen ger:

$$\begin{aligned} q(h,k) &= \varphi(y+k) - \varphi(y) = k\varphi'(y+\theta k) \\ &= k\left(f'_y(x+h, y+\theta k) - f'_y(x, y+\theta k)\right), \quad 0<\theta<1. \end{aligned}$$

Medelvärdessatsen en gång till ger att $\exists \eta : 0<\eta<1$ och

$$q(h,k) = hk\, f''_{yx}(x+\eta h, y+\theta k).$$

Kontinuiteten för f''_{yx} i (x,y) ger

$$\frac{q(h,k)}{hk} = f''_{yx}(x+\eta h, y+\theta k) \longrightarrow f''_{yx}(x,y), \text{ då } (h,k)\to(0,0).$$

Genom att analogt behandla $q(h,k) = \psi(x+h) - \psi(x)$ får vi att

$$\frac{q(h,k)}{hk} \longrightarrow f''_{xy}(x,y), \text{ då } (h,k)\to(0,0).$$

Alltså gäller $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$. □

Anmärkning. En motsvarande Sats för partiella derivator av högre ordning gäller, förutsatt att de partiella derivatorna är tillräckligt många gånger kontinuerligt deriverbara i $\bar{a}$.

Exempel 37. Definiera $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0)=0$.

Då är f kont. i $(0,0)$ (polära koordinater).

$$\begin{cases} f'_x(0,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \dots = -y, \\ f'_y(x,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \dots = x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h-0}{h} = -1 \\ f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h-0}{h} = 1 \end{cases}$$

$f''_{xy} \neq f''_{yx}$ i $(0,0)$. Då $(x,y) \neq (0,0)$ ges f''_{xy} av

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3},$$

som inte är kontinuerlig i $(0,0)$.

Exempel 38. Låt $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{då } x=0 \text{ eller } y=0, \\ 1, & \text{annars.} \end{cases}$

Då är f diskontinuerlig i $(0,0)$, men

$$\begin{cases} f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0, \\ f'_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0, \end{cases}$$

så partiella derivatorna existerar i $(0,0)$.

Differentierbarhet

För funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gäller att deriverbarhet i en punkt medför kontinuitet. Exempel 38 demonstrerar att partiell deriverbarhet inte medför kontinuitet. Vi skall införa ett nytt begrepp, <u>differentierbarhet</u>, som medför kontinuitet.

Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar i $x = a$ gäller

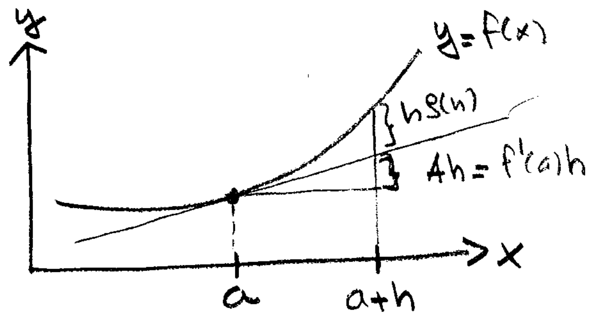
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A \quad (= f'(a)),$$

vilket kan uttryckas med funktionen $\rho(h)$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \rho(h), \quad \rho(h) \to 0, \text{ då } h \to 0,$$

eller ekvivalent

$$(*) \qquad f(a+h) - f(a) = Ah + h\rho(h), \quad \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0.$$



$y = f(a) + f'(a)(x-a)$

Formuleringen $(*)$ av deriverbarhetskravet kan generaliseras till högre dimensioner.

Definition 19. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning av punkten $\bar{a}$. Vi säger att f är <u>differentierbar i punkten $\bar{a}$</u> om det finns konstanter $A_1, \dots, A_n$ och en funktion $\rho(\bar{h})$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$, sådana att

$$(1) \quad f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + |\bar{h}|\,\rho(\bar{h})$$

och $\lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} \rho(\bar{h}) = 0$.

Om f är differentierbar i varje punkt $\bar{a} \in D_f$ säger vi att f är <u>differentierbar.</u>

Sats 17. Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt $\bar{a}$, så är f kontinuerlig i $\bar{a}$.

Bevis: Ur (1) följer att $f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) \longrightarrow 0$ då $\bar{h} \to \bar{0}$, vilket innebär att f är kontinuerlig i $\bar{a}$. $\square$

Sats 18. Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt $\bar{a}$, så är f partiellt deriverbar i $\bar{a}$ med

$$f'_{x_j}(\bar{a}) = A_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

där $A_1, \dots, A_n$ är talen i (1).

Bevis: Välj i (1) speciellt $\bar{h} = t \cdot \bar{e}_j = (0, \dots, 0, \underset{\text{komponent } j}{t}, 0, \dots, 0)$, $t \neq 0$, erhålls
Efter division med t i (1)

$$\frac{f(\bar{a}+t\cdot\bar{e}_j) - f(\bar{a})}{t} = A_j + \frac{|t|}{t}\,\rho(t\,\bar{e}_j) \longrightarrow A_j,$$

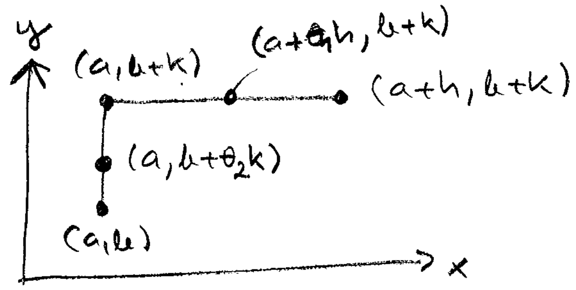
då $t \to 0$.

Definitionen på partiell derivata ger att $f'_{x_j}(\bar{a}) = A_j$. $\square$

Det är svårt att i praktiken med Definition 19 kontrollera om f är differentierbar i punkten $\bar{a}$. Man kan bestämma de partiella derivatorna i $\bar{a}$, (vanligen lätt att utföra), och om de är kontinuerliga i $\bar{a}$ och definierade i en omgivning av $\bar{a}$ har vi följande sats:

Sats 19. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in D_f$. (f'_{x_j} existerar i omgivning av $\bar{a}$ och kontinuerliga i $\bar{a}$). Då är f differentierbar i $\bar{a}$.

Bevis: (För fallet $n=2$). Låt $\bar{a} = (a,b) \in D_f$ och antag att f'_x, f'_y är kont. i $\bar{a}$ och definierade i omgivning av $\bar{a}$. Vi skall enligt (1) i Definition 19 uppskatta differensen $f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = f(a+h, b+k) - f(a,b)$, $(n=2)$.



Med hjälp av punkten $(a, b+k)$ skriver vi

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \underbrace{[f(a+h,b+k) - f(a,b+k)]}_{=\varphi(h)-\varphi(0)} + [f(a,b+k) - f(a,b)],$$

och sätter $\varphi(t) = f(a+t, b+k)$. Medelvärdessatsen ger då:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b+k) = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1 h)h = f'_x(a+\theta_1 h, b+k)\,h, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Då f'_x är kontinuerlig i (a,b) kan vi skriva

$$f'_x(a+\theta_1 h, b+k) = f'_x(a,b) + \rho_1(h,k), \quad \rho_1(h,k) \to 0, \text{ då } (h,k) \to (0,0).$$

Analogt får vi

$$f(a,b+k) - f(a,b) = f'_y(a, b+\theta_2 k)k = f'_y(a,b)k + k\rho_2(h,k), \quad \rho_2(h,k) \to 0, \text{ då } (h,k) \to (0,0).$$

Då får vi för differensen att

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f'_x(a,b)h + h\varrho_1(h,k) + f'_y(a,b)k + k\varrho_2(h,k)$$

$$= f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varrho(h,k),$$

där $\varrho(h,k) = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\varrho_1(h,k) + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\varrho_2(h,k)$, och då gäller $\varrho(h,k) \to 0$, då $(h,k) \to (0,0)$. Därmed är f differentierbar i $\bar{a}$. □

<u>Exempel 39.</u> Funktionen $f(x,y,z) = xy^2z + \sin(xyz^2)$ är <u>differentierbar</u> (i $\mathbb{R}^3$), <u>ty de partiella derivatorna</u>

$$f'_x = y^2z + yz^2\cos(xyz^2), \quad f'_y = 2xyz + xz^2\cos(xyz^2),$$

$$f'_z = xy^2 + 2xyz\cos(x,y,z^2),$$

<u>är kontinuerliga</u> (i $\mathbb{R}^3$).

<u>Anmärkning.</u> För att visa att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i en punkt $\bar{a} \in D_f$ räcker det att kontrollera att f:s alla partiella derivator av första ordning existerar i en omgivning av $\bar{a}$ och är kontinuerliga i $\bar{a}$, då ger Sats 19 att f är differentierbar i $\bar{a}$ och vidare Sats 17 att f är kontinuerlig i punkten $\bar{a}$.

Differential, tangentplan och felanalys

Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar i punkten $\bar{a} \in D_f$. Då ger teorin i föregående avsnitt att vi kan uttrycka differensen $\Delta f = f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a})$ mellan två funktionsvärden:

$$\Delta f = f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = \underbrace{f'_{x_1}(\bar{a})h_1 + \dots + f'_{x_n}(\bar{a})h_n}_{=:\,df} + |\bar{h}|\rho(\bar{h}),$$

$\rho(\bar{h}) \to 0$, då $\bar{h} \to \bar{0}$.

Definition 20. Differentialen av f i punkten $\bar{a}$ betecknas df och ges av

$$df = f'_{x_1}(\bar{a})h_1 + \dots + f'_{x_n}(\bar{a})h_n = \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(\bar{a}) \cdot h_j .$$

Differentialen kan uppfattas som en linjär funktion av $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$,

$$\bar{h} \mapsto \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(\bar{a}) h_j .$$

Den ger en linjär approximation av Δf i en omgivning av $\bar{a}$.

Ofta betecknas variabeldifferensen h_j med dx_j och man skriver kort (utan att ange $\bar{a}$):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

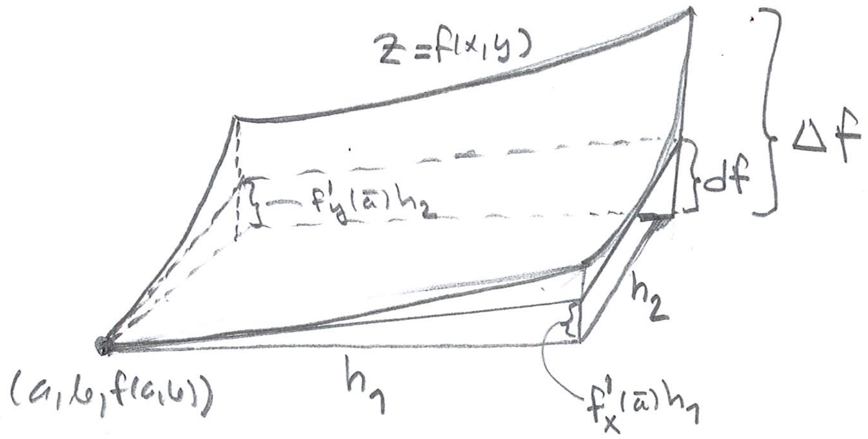
För en geometrisk tolkning av differentialen df för $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given av $z = f(x,y)$, sätter vi $a+h_1 = x$ och $b+h_2 = y$, $\bar{a} = (a,b)$, $\bar{h} = (h_1,h_2)$.

$$\Delta f = f(x,y) - f(a,b) = f'_x(\bar{a})(x-a) + f'_y(\bar{a})(y-b) + |\bar{h}|\rho(\bar{h})$$

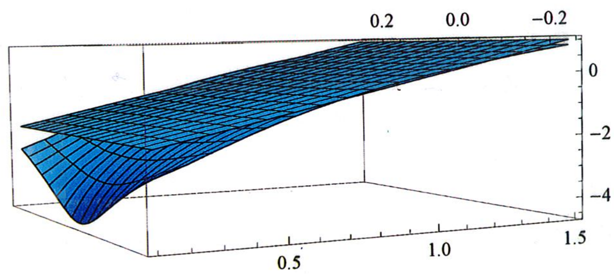
Då kan $f(x,y)$ approximeras i en omgivning av punkten (a,b) med

$$g(x,y) = f(a,b) + f'_x(\bar{a})(x-a) + f'_y(\bar{a})(y-b).$$

Ytan $z = g(x,y)$ är ett plan i $\mathbb{R}^3$ som kallas tangentplanet till $y = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$.



Exempel 40. Bestämmer tangentplanet i $(1,0)$ för $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.



$$f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f'_x(1,0) = 2, \quad f'_y(1,0) = 0$$

$$z = f(1,0) + 2\cdot(x-1) + 0\cdot(y-0)$$

$$\therefore\ z = 2x - 2.$$

Antag att vi använder beteckningen $\Delta\bar{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ istället för $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$. Då har vi

$$\Delta f = f(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x}) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

med felet $|\Delta\bar{x}|\,\rho(\Delta\bar{x})$, där $\rho(\Delta\bar{x}) \to 0$ då $\Delta\bar{x} \to \bar{0}$.

Antag att vi (genom mätningar) känner närmevärden $x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n$ till $x_1, \dots, x_n$.

Då är $f(\bar{x} + \Delta\bar{x})$ ~~ett~~ närmevärde till det exakta värdet $f(\bar{x})$. Triangelolikheten ger den <u>allmänna felfortplantningsformeln</u>!

$$|\Delta f| \lesssim \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n| .$$

"approximativt mindre än"

<u>Exempel 47</u>. Vi har beräknat $y = x_1 x_2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_3}}$

för $x_1 = 2{,}0 \pm 0{,}1$, $x_2 = 3{,}0 \pm 0{,}2$ och $x_3 = 1{,}0 \pm 0{,}1$.

$\therefore$ $|\Delta x_1| \leq 0{,}1$, $|\Delta x_2| \leq 0{,}2$, $|\Delta x_3| \leq 0{,}1$

För felet Δy fås

$$|\Delta y| \lesssim \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| |\Delta x_2| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_3}\right| |\Delta x_3|$$

$$= \left| x_2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_3}} \right| |\Delta x_1| + \left| 2x_1 x_2 \frac{1}{\sqrt{x_3}} \right| |\Delta x_2| + \left| \frac{x_1 x_2^2}{-2x_3^{3/2}} \right| |\Delta x_3|$$

$$\lesssim 9 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}2 + 9{,}0 \cdot 0{,}1 = 4{,}2$$

<u>Alltså</u>: $y = 18{,}0 \pm 4{,}2$, med maximal feluppskattning.

Derivering av sammansatta funktioner

Sats 20. (kedjeregeln). Antag $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ är deriverbar i punkten $t_0 \in \mathbb{R}$. Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, och antag att f är kontinuerligt deriverbar i punkten $g(t_0)$. Då är den sammansatta funktionen $f(g(t))$ deriverbar i punkten t_0 och

$$(2) \quad \frac{d}{dt} f(g(t))\Big|_{t=t_0} = f'_{x_1}(g(t_0)) \cdot g_1'(t_0) + \ldots + f'_{x_n}(g(t_0)) \cdot g_n'(t_0).$$

Om vi sätter $z(t) = f(g(t))$ kan vi kortfattat skriva

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dg_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dg_n}{dt}.$$

Bevis: Vi undersöker differenskvoten

$$\frac{f(g(t_0+k)) - f(g(t_0))}{k}, \quad \text{då } k \to 0.$$

Då f är kontinuerligt deriverbar i $g(t_0)$ är den differentierbar i punkten, Sats 19, och vi skriver:

$$(*) \quad f(g(t_0)+h) - f(g(t_0)) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(g(t_0))\, h_i + |\bar{h}|\, \rho(\bar{h}),$$

där $\rho(\bar{h}) \to 0$, då $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n) \to \bar{0}$.

Vi kan speciellt välja $\bar{h} = g(t_0+k) - g(t_0)$, ty denna differens går mot $\bar{0}$ då $k \to 0$, då g är kontinuerlig i t_0. Insättning i $(*)$ och division med k ger uttrycket:

$$\frac{f(g(t_0+k))-f(g(t_0))}{k} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(g(t_0)) \cdot \frac{g_i(t_0+k)-g_i(t_0)}{k} + \frac{|\bar{h}|}{k}\, \rho(\bar{h}).$$

Summan i högerledet går mot (2) då $k \to 0$ och

$$\frac{\bar{h}}{k} = \frac{g(t_0+k)-g(t_0)}{k} \longrightarrow (g_1'(t_0), \ldots, g_n'(t_0)),$$

så resttermen $\frac{|\bar{h}|}{k}\rho(\bar{h}) \longrightarrow 0$, då $k \to 0$. Gränsvärdet för differenskvoten existerar, vilket innebär att $f(g(t))$ är deriverbar i t_0, och dess derivata ges av (2). □

<u>Exempel 42</u>. Låt $f(x,y) = x^2y - y^3$ och $g(t) = (2t^3 - 5t, t^4 + 3t - 7)$. Beräkna $\frac{d}{dt} f(g(t))$ i punkten $t_0 = -2$.

<u>Lösning</u>:

$$g(t_0) = (2(-2)^3 - 5(-2), (-2)^4 + 3 \cdot 2 - 7) = (-6, 3)$$

$$g'(t) = (6t^2 - 5, 4t^3 + 3)$$

$$g'(t_0) = (19, -29) = (g_1'(t_0), g_2'(t_0))$$

$$f'_x(x,y) = 2xy, \quad f'_x(g(t_0)) = f'_x(-6,3) = -36$$

$$f'_y(x,y) = x^2 - 3y^2, \quad f'_y(g(t_0)) = f'_y(-6,3) = 9$$

Då ger formel (2) i Sats 20 att

$$\frac{d}{dt} f(g(t))\Big|_{t=t_0} = f'_x(g(t_0)) \cdot g_1'(t_0) + f'_y(g(t_0))\, g_2'(t_0)$$

$$= (-36) \cdot 19 + 9 \cdot (-29) = \underline{\underline{-945}}.$$

Exempel 43. Antag att funktionen $f(x,y)$ har kontinuerliga partiella derivator i området $x>0, y>0$, och satisfierar den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Visa att f är konstant på hyperbelgrenarna $xy = c\ (>0)$ i första kvadranten.

Lösning: Vi undersöker f på kurvor av formen $y=\frac{c}{x}$, $x>0$, c konstant

Bilda

$$z(x) = f\left(x, \frac{c}{x}\right), \quad x>0.$$

Kedjeregeln, Sats 20, ger:

$$z'(x) = f'_x\left(x,\frac{c}{x}\right)\cdot\frac{d}{dx}(x) + f'_y\left(x,\frac{c}{x}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x}\right)$$

$$= f'_x\left(x,\frac{c}{x}\right)\cdot 1 + f'_y\left(x,\frac{c}{x}\right)\cdot\left(-\frac{c}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(x f'_x\left(x,\frac{c}{x}\right) - \frac{c}{x} f'_y\left(x,\frac{c}{x}\right)\right).$$

Då ju $x f'_x(x,y) - y f'_y(x,y) = 0$ för $x>0, y>0$, får vi att $z'(x)=0$ då $x>0$.

Detta betyder att $\underline{z(x) = f\left(x,\frac{c}{x}\right)}$ är konstant, då $x>0$.

Vi kan generalisera kedjeregeln, Sats 20, till en sammansatt funktion av formen

$$f(x(\bar{t})) = f(x_1(t_1,\ldots,t_q),\ldots,x_n(t_1,\ldots,t_q)),$$

där alltså $x: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. När vi vill derivera $f(x(\bar{t}))$ med avseende på t_j hålls de övriga t_k:na som fixa konstanter, och då beror ju $x(\bar{t})$ av en variabel t_j och vi kan tillämpa Sats 20 om vi antar att $f(\bar{x})$ och $x_1(\bar{t}),\ldots,x_n(\bar{t})$ är kontinuerligt deriverbara i punkterna $x(\bar{t}_0)$ respektive $\bar{t}_0$:

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial t_j}\left(f(x(\bar{t}))\right)\Big|_{\bar{t}=\bar{t}_0} = f'_{x_1}(x(\bar{t}_0))\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}(\bar{t}_0)+\ldots+f'_{x_n}(x(\bar{t}_0))\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}(\bar{t}_0).$$

Om vi sätter $z(\bar{t}) = f(x(\bar{t}))$ skriver vi kortfattat

$$(5)\quad \frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}.$$

Som en matrisprodukt kan (5) skrivas:

$$(6)\quad (z'_{t_1}\ldots z'_{t_q}) = (f'_{x_1}\ldots f'_{x_n})\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial t_q}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_q}\end{pmatrix}.$$

Exempel 44. Bestäm vilka kontinuerligt deriverbara funktioner f av två variabler som uppfyller sambandet

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

i $\mathbb{R}^2$ genom att introducera de nya variablerna $\begin{cases} s = x+y, \\ t = x-y. \end{cases}$

Lösning: Vi skriver $f = f(s,t) = f(s(x,y), t(x,y))$. Kedjeregeln (5) ger att:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot (-1). \end{cases}$$

Sambandet $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ transformeras till

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Detta implicerar att f är en deriverbar funktion φ av variabeln s, $f(s,t) = \varphi(s)$. Uttryckt i de ursprungliga variablerna är då de sökta funktionerna f av formen: $f(x,y) = \varphi(x+y)$, där φ är en godtycklig deriverbar funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

Ex: $f(x,y) = \sin(x+y)$, $f(x,y) = e^{(x+y)^2}$, ...

Exempel 45. Transformera uttrycket
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$
genom övergång till polära koordinater i planet.

Lösning: $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$ Betraktar $f(x,y) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta \end{cases}$$

Multiplicera första ekvationen med $r\sin\theta$, den andra med $\cos\theta$ och addera!
$$r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} = r\frac{\partial f}{\partial y},$$
vilket ger $\frac{\partial f}{\partial y}$. Insättning i andra ekvationen ger:
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \cos\theta\left(r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}.$$ **Alltså!**

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases}$$

Därmed erhålls:
$$\underline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \ldots = \underline{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2}.$$