Värdemängden till en kontinuerlig funktion

Definition 7. En mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad om $\exists M > 0 : A \subseteq O_M(\bar{0})$, dvs. om $|\bar{x}| \leq M, \forall \bar{x} \in A$.
Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Då är f begränsad om värdemängden $\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in D_f\}$ är begränsad.
Funktionen f är begränsad på mängden $B \subseteq D_f$, om mängden $\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in B\}$ är begränsad.
En mängd $A \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt om den är sluten och begränsad.

Exempel 28. Funktionen $f(x,y) = \sin(xy)$ är begränsad $(M = 1)$, medan $g(x,y) = x^2 + y^2$ är obegränsad. På mängden $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ är g begränsad $(M = 1)$.

Sats 9. Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig på en kompakt mängd $B \subseteq D_f$.
Då är f begränsad på B.

Bevis: Antites: f är inte begränsad på B.
Då gäller för alla $M > 0$ att $\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in B\} \cap \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m : |\bar{y}| > M\} \neq \emptyset$.
Då kan vi konstruera en punktföljd $(\bar{x}_p)_{p=1}^{\infty}$ i B:

$M = 1$: Tag $\bar{x}_1 \in B$ så att $|f(\bar{x}_1)| \geq 1$,
$M = 2$: —"— $\bar{x}_2 \in B$ —"— $|f(\bar{x}_2)| \geq 2$,
$\vdots$
$M = p$: —"— $\bar{x}_p \in B$ —"— $|f(\bar{x}_p)| \geq p$,
$\vdots$

Då B är kompakt är mängden begränsad, vilket innebär att punktföljden $(\bar{x}_p)_{p=1}^{\infty}$ är begränsad. Då ger Sats B (Bolzano–Weierstrass) att vi kan utplocka en konvergent delföljd $(\bar{x}_{p_q})_{q=1}^{\infty}$ ur $(\bar{x}_p)$, med $\bar{x} = \lim_{q\to\infty} \bar{x}_{p_q}$.

Varje omgivning $O_\delta(\bar{x})$ av $\bar{x}$ innehåller punkter ur B, (åtminstone $\bar{x}_{p_q}$ för stora q), så $\bar{x} \in B \cup \partial B = B$ då B är sluten. (B kompakt).

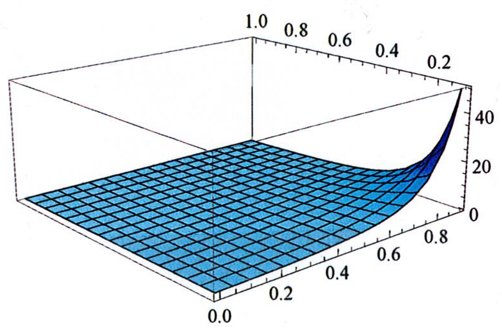
Då f är kontinuerlig i B och därmed i $\bar{x}$, ger Sats C att $\lim_{q\to\infty} f(\bar{x}_{p_q}) = f(\bar{x})$. I Exempel 22 visade vi att $h(\bar{x}) = |\bar{x}|$ är kontinuerlig. Då sammansättningar av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga, Sats 8, gäller det att:

$$\lim_{q\to\infty} |f(\bar{x}_{p_q})| = |\lim_{q\to\infty} f(\bar{x}_{p_q})| = |f(\bar{x})| < \infty,$$

ty $\bar{x} \in B \subseteq D_f$, men <u>vår konstruktion av $(\bar{x}_p)$ ger att</u> $|f(\bar{x}_{p_q})| \to \infty$, då $q \to \infty$, <u>en motsägelse</u>. Antitesen falsk och <u>f begränsad på B</u>. $\triangleright$

<u>Anmärkning</u> 1. Satsen gäller <u>inte</u> om B inte är sluten. $B = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\} \setminus \{(1,0)\}$ är en begränsad men inte sluten mängd.

$f(x,y) = \dfrac{1}{(x-1)^2 + y^2}$ kontinuerlig men inte begränsad på B.



2. Identiska avbildningen $f(x,y)=(x,y)$ är kontinuerlig men inte begränsad på $B=\mathbb{R}^2$, som är en sluten men obegränsad mängd. ($B=\mathbb{R}^2$ sluten, ty $\partial B=\emptyset$ så $B=B\cup\partial B=\overline{B}$).

Definition 8. Låt $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ och $B\subseteq D_f$. Med $f(B)$ avses talmängden $\{f(\bar{x}):\bar{x}\in B\}$. Om $f(B)$ är uppåt begränsad existerar supremum av $f(B)$ och vi definierar:

$$\sup_{\bar{x}\in B} f(\bar{x}) := \sup f(B) = \text{det minsta tal som är större än eller lika med varje tal i } f(B).$$

Om $f(B)$ är nedåt begränsad existerar infimum av $f(B)$ och vi definierar:

$$\inf_{\bar{x}\in B} f(\bar{x}) := \inf f(B) = \text{det största tal som är mindre än eller lika med varje tal i } f(B).$$

Om $\sup_{\bar{x}\in B} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$ för någon punkt $\bar{a}\in B$, kallas $f(\bar{a})$ för f:s största värde på B.

Om $\inf_{\bar{x}\in B} f(\bar{x}) = f(\bar{b})$ för någon punkt $\bar{b}\in B$, kallas $f(\bar{b})$ för f:s minsta värde på B.

Anmärkning: Om $B=D_f$ brukar man hänvisa till f:s supremum, infimum, största värde och minsta värde.

Sats 10. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig på $B \subseteq D_f$ och antag att B är en kompakt mängd. Då gäller:

1. $\exists \, \bar{a} \in B : f(\bar{a}) = \sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x})$,
2. $\exists \, \bar{b} \in B : f(\bar{b}) = \inf_{\bar{x} \in B} f(\bar{x})$.

Bevis: 1. Enligt Sats 9 är $f(B)$ en begränsad mängd. Då existerar $S = \sup_{\bar{x} \in B} f(\bar{x})$.

Antites: $\forall \bar{x} \in B : f(\bar{x}) < S$.

Sätt: $g(\bar{x}) = \dfrac{1}{S - f(\bar{x})}$. Då är g definierad och kontinuerlig i hela B. Då B är kompakt ger Sats 9 att g är begränsad på B:

$$\exists M > 0 \; \forall \bar{x} \in B : \frac{1}{S - f(\bar{x})} < M.$$

Därmed erhålls följande implikationer:

$$S - f(\bar{x}) > \frac{1}{M} \implies f(\bar{x}) < S - \frac{1}{M}$$

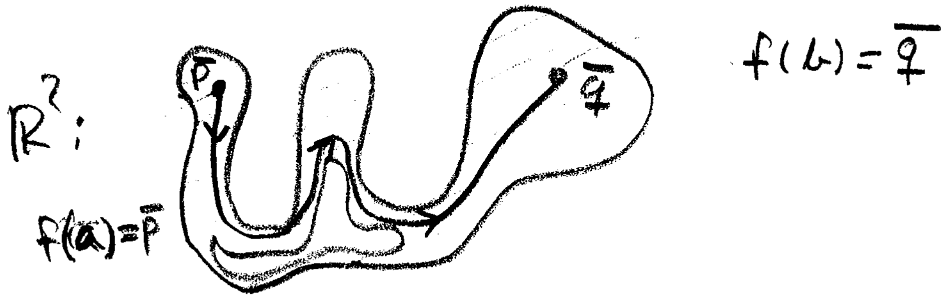
$$\implies S = \sup_{\bar{x} \in B} f(x) \leq S - \frac{1}{M} \quad \lightning$$

och därmed är antitesen falsk.

Det finns en punkt $\bar{a} \in B : f(\bar{a}) = S$.

2. Tillämpa 1. på $-f$. $\square$

Definition 9. Mängden $B \subseteq \mathbb{R}^n$ är sammanhängande om det för varje par av vektorer $\bar{p}, \bar{q} \in B$ finns en kontinuerlig kurva i B mellan $\bar{p}$ och $\bar{q}$, dvs. en kontinuerlig funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ så att $f(a) = \bar{p}$ och $f(b) = \bar{q}$.



Sats 11. Antag att $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på den kompakta och sammanhängande mängden B. Då är $f(B) = \{f(\bar{x}) : \bar{x} \in B\}$ ett slutet begränsat intervall.

Bevis: Sats 10 ger att det existerar $\bar{a}, \bar{b} \in B$:

$$f(\bar{a}) = \sup_{\bar{x}\in B} f(\bar{x}) = M \quad \text{och} \quad f(\bar{b}) = \inf_{\bar{x}\in B} = m.$$

Då B är sammanhängande finns en kontinuerlig avbildning $r:[a,b] \to B$ så att $r(a) = \bar{a}$ och $r(b) = \bar{b}$.
Avbildningen $(f \circ r):[a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, då r och f är kontinuerliga, Sats 8.
Då $f \circ r$ är en reellvärd kontinuerlig funktion på ett ändligt slutet intervall $[a,b]$ antar den alla värden mellan $(f\circ r)(a)$ och $(f \circ r)(b)$,

$$(f\circ r)(a) = f(r(a)) = f(\bar{a}) = M,$$
$$(f\circ r)(b) = f(r(b)) = f(\bar{b}) = m.$$

Men då gäller det att $f(B) = [m, M]$. $\square$

Likformig kontinuitet

En funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\bar{x}_0 \in D_f$ om

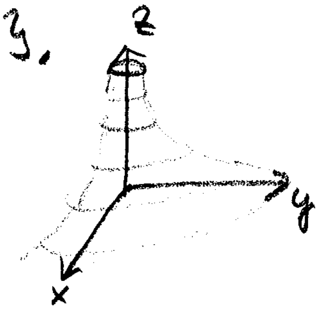
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : (|\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta, \; \bar{x} \in D_f) \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon.$$

Här beror δ av både ε och punkten $\bar{x}_0$, $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Väljer vi med samma ε en ny punkt $\bar{x}_1$ där f är kontinuerlig måste vi eventuellt välja ~~ett~~ mindre δ i kontinuitetsdefinitionen.
Om det för ~~ett~~ givet $\varepsilon > 0$ finns ~~ett~~ $\delta > 0$ som duger för varje kontinuitetspunkt $\bar{x}_0$, så är f likformigt kontinuerlig.

Definition 10. Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är likformigt kontinuerlig på $B \subseteq D_f$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : (|\bar{x} - \bar{y}| < \delta \text{ och } \bar{x}, \bar{y} \in B) \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon.$$

Exempel 29. Funktionen $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ är inte likformigt kontinuerlig på $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.



Visar: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists \bar{x}, \bar{y} \in D_f$:
$$(|\bar{x} - \bar{y}| < \delta \text{ och } |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq \varepsilon).$$

Välj $\varepsilon = 1$. Tag godt $\delta > 0$.
Välj: $\bar{x} = (x, 0)$, $\bar{y} = (x + \frac{\delta}{2}, 0)$, $0 < x \leq 1$.
Då är $|\bar{x} - \bar{y}| = |(\delta/2, 0)| = \frac{\delta}{2} < \delta$.

$$|f(x,0) - f(x + \delta/2, 0)| = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+\delta/2)^2} \right| = \left| \frac{x^2 + \delta x + \delta^2/4 - x^2}{x^2 (x + \delta/2)^2} \right|$$

$$\geq \frac{\delta x}{x^2 (x + \delta/2)^2} = \frac{\delta}{x(x+\delta/2)^2} \geq \frac{\delta}{x(1+\delta/2)^2} \geq 1, \text{ om } x \leq \frac{\delta}{(1+\delta/2)^2}.$$

$\therefore \exists \varepsilon = 1 \; \forall \delta > 0 \; \exists \bar{x} = (x, 0), \; \bar{y} = (x + \delta/2, 0), \; x \leq \min(1, \delta/(1+\delta/2)^2)$:
$$|\bar{x} - \bar{y}| < \delta \text{ och } |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \geq 1.$$

$\therefore$ f är inte likformigt kontinuerlig i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Sats 12. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig på den kompakta mängden $B \subseteq D_f$. Då är f likformigt kontinuerlig på B.

Bevis: Antites: f är ej likformigt kontinuerlig på B.

Då $\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall\, \delta \in \{\frac{1}{p} : p \in \mathbb{N}\}\; \exists\, \bar{x}_p, \bar{y}_p \in B : (|\bar{x}_p - \bar{y}_p| < \frac{1}{p}$ och $|f(\bar{x}_p) - f(\bar{y}_p)| \geq \varepsilon)$.

B kompakt $\Rightarrow$ följden $(\bar{x}_p)$ är begränsad.

$\Rightarrow \exists$ konvergent delföljd $(\bar{x}_{p_q})$ av $(\bar{x}_p)$, (Sats 8).

Sätt $\bar{x} = \lim_{q \to \infty} \bar{x}_{p_q}$. Varje omgivning av $\bar{x}$ innehåller punkter ur $(\bar{x}_{p_q}) \Rightarrow \underline{\bar{x} \in B \cup \partial B = \underline{B}}$, då B är sluten.

Låt $(\bar{y}_{p_q})$ vara motsvarande delföljd av $(\bar{y}_p)$.

$$|\bar{y}_{p_q} - \bar{x}| \leq \underbrace{|\bar{y}_{p_q} - \bar{x}_{p_q}|}_{< \frac{1}{p_q} \to 0,\ \text{då } q \to \infty} + \underbrace{|\bar{x}_{p_q} - \bar{x}|}_{\to 0,\ \text{då } q \to \infty.}$$

Alltså $|\bar{y}_{p_q} - \bar{x}| \to 0$, då $q \to \infty$, så $\lim_{q \to \infty} \bar{y}_{p_q} = \bar{x}$.

f är kontinuerlig: $f(\bar{x}) = \lim_{q \to \infty} f(\bar{x}_{p_q}) = \lim_{q \to \infty} f(\bar{y}_{p_q})$

Men då erhålls:

$$\varepsilon \leq |f(\bar{x}_{p_q}) - f(\bar{y}_{p_q})| \leq \underbrace{|f(\bar{x}_{p_q}) - f(\bar{x})|}_{\to 0,\ \text{då } q \to \infty} + \underbrace{|f(\bar{x}) - f(\bar{y}_{p_q})|}_{\to 0,\ \text{då } q \to \infty} \to 0$$

Detta ger en motsägelse. Antitesen är falsk och f är likformigt kontinuerlig på B. $\square$

Analys av rymdkurvor

En avbildning $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, definierar en rymdkurva. (En plan kurva då $m=2$, en kurva i rummet då $m=3$). Funktionen f har m reellvärda komponentfunktioner $f_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_m(t))$. Sats 3 ger att om $\lim_{t \to t_0} f(t)$ existerar, så kan det beräknas komponentvis,

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to t_0} f_m(t) \right).$$

Definition 11. Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ vara definierad i en omgivning av punkten $t_0 \in D_f$. Att f är deriverbar i t_0 betyder att gränsvärdet

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \left(f(t) - f(t_0) \right)$$

existerar. Gränsvärdet kallas derivatan av f i t_0.
Beteckning: $f'(t_0)$. Höger- och vänsterderivatan $f'_+(t_0)$ resp. $f'_-(t_0)$ definieras analogt. $(t \to t_0^+, t \to t_0^-)$.

Anmärkning 1: Vid existens av derivata ger Sats 3

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \lim_{t \to t_0} \frac{f_m(t) - f_m(t_0)}{t - t_0} \right),$$

Alltså: $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_m'(t_0))$ och

f är deriverbar i t_0 $\Leftrightarrow$ $f_1, \ldots, f_m$ är deriverbara i t_0.

Om $f(t)$ är deriverbar i olika punkter t, ger derivatans värden i dessa punkter en ny funktion

$$f' = \frac{df}{dt} : t \mapsto f'(t),$$

vilken i sin tur kan ha en derivata $f''(t)$ osv.

Anmärkning 2: Funktionen $F(t) = (F_1(t), \dots, F_m(t))$ kallas en primitiv funktion till $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$, om $F'(t) = f(t)$ vilket är ekvivalent med att $F_1'(t) = f_1(t), \dots, F_m'(t) = f_m(t)$. Mängden av primitiver kan betecknas $\int f(t)\,dt$ och beräknas komponentvis:

$$\int f(t)\,dt = \left(\int f_1(t)\,dt, \dots, \int f_m(t)\,dt \right).$$

Definition 12. Antag att $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$ och att $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är integrerbar på intervallet $[a,b]$. Då definieras integralen av $f(t)$ över $[a,b]$ genom

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b f_m(t)\,dt \right).$$

Därmed är integration av $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ återförd på integration av komponentfunktioner $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exempel 30. Integralen av $f(t) = (e^t, t^3, \cos t)$ över intervallet $[0,1]$ ges av

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \left(\int_0^1 e^t\,dt, \int_0^1 t^3\,dt, \int_0^1 \cos t\,dt \right)$$

$$= \left(\left[e^t\right]_0^1, \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1, \left[\sin t\right]_0^1 \right)$$

$$= \left(e-1, \frac{1}{4}, \sin 1 \right).$$

Exempel 31. (kedjeregeln). Antag att $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är deriverbar i t_0 och att $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ är deriverbar i $g(t_0)$. Då har den sammansatta funktionen $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ derivatan $g'(t_0)\,f'(g(t_0))$, ty

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(t_0) &= ((f_1\circ g)'(t_0),\dots,(f_m\circ g)'(t_0))\\ &= (g'(t_0)f_1'(g(t_0)),\dots,g'(t_0)f_m'(g(t_0)))\\ &= g'(t_0)\,(f_1'(g(t_0)),\dots,f_m'(g(t_0)))\\ &= g'(t_0)\,f'(g(t_0)).\end{aligned}$$

Sats 13. Antag att $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ och $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är deriverbara i punkten t_0. ($t_0\in D_f^\circ\cap D_g^\circ$ och $t_0\in D_h^\circ$). Då är funktionerna $f\pm g$, $f\cdot g$, hf och $f\times g$, ($m=3$), deriverbara i t_0, och

1. $(f\pm g)'(t_0)=f'(t_0)\pm g'(t_0)$,
2. $(hf)'(t_0)=h'(t_0)f(t_0)+h(t_0)f'(t_0)$,
3. $(f\cdot g)'(t_0)=f'(t_0)\cdot g(t_0)+f(t_0)\cdot g'(t_0)$,
4. $(f\times g)'(t_0)=f'(t_0)\times g(t_0)+f(t_0)\times g'(t_0)$, $m=3$.

Bevis. 1. och 2. bevisas enkelt "komponentvis" genom att utnyttja motsvarande deriveringsregler för avbildningar från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

3. $(f\cdot g)(t) = f(t)\cdot g(t) = \sum_{k=1}^{m} f_k(t)\, g_k(t)$

Derivering gir:

$$\underline{(f\cdot g)'(t_0)} = \sum_{k=1}^{m}\left(f_k'(t_0)\, g_k(t_0) + f_k(t_0)\, g_k'(t_0)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} f_k'(t_0)\, g_k(t_0) + \sum_{k=1}^{m} f_k(t_0)\, g_k'(t_0)$$
$$= \underline{f'(t_0)\cdot g(t_0) + f(t_0)\cdot g'(t_0)}.$$

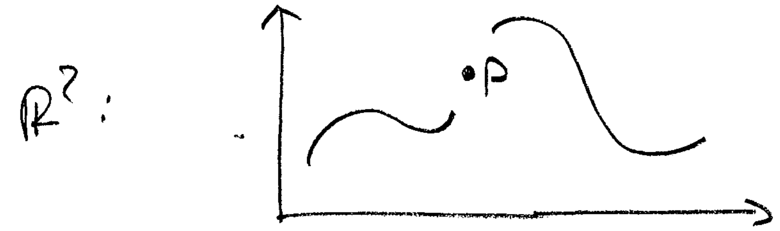
4. $(f\times g)(t) = \big(f_2(t)\, g_3(t) - f_3(t)\, g_2(t),\ f_3(t)\, g_1(t) - f_1(t)\, g_3(t),$
$(f(t)\times g(t))$ $\quad f_1(t)\, g_2(t) - f_2(t)\, g_1(t)\big)$

Derivering komponentvis gir:

$$\underline{(f\times g)'(t_0)} = \big(f_2'(t_0)\, g_3(t_0) + f_2(t_0)\, g_3'(t_0) - f_3'(t_0)\, g_2(t_0) - f_3(t_0)\, g_2'(t_0),$$
$$f_3'(t_0)\, g_1(t_0) + f_3(t_0)\, g_1'(t_0) - f_1'(t_0)\, g_3(t_0) - f_1(t_0)\, g_3'(t_0),$$
$$f_1'(t_0)\, g_2(t_0) + f_1(t_0)\, g_2'(t_0) - f_2'(t_0)\, g_1(t_0) - f_2(t_0)\, g_1'(t_0)\big)$$
$$= \big(f_2'(t_0)\, g_3(t_0) - f_3'(t_0)\, g_2(t_0),\ f_3'(t_0)\, g_1(t_0) - f_1'(t_0)\, g_3(t_0),$$
$$f_1'(t_0)\, g_2(t_0) - f_2'(t_0)\, g_1(t_0)\big)$$
$$+\big(f_2(t_0)\, g_3'(t_0) - f_3(t_0)\, g_2'(t_0),\ f_3(t_0)\, g_1'(t_0) - f_1(t_0)\, g_3'(t_0),$$
$$f_1(t_0)\, g_2'(t_0) - f_2(t_0)\, g_1'(t_0)\big)$$
$$= \underline{f'(t_0)\times g(t_0) + f(t_0)\times g'(t_0)}. \quad \square$$

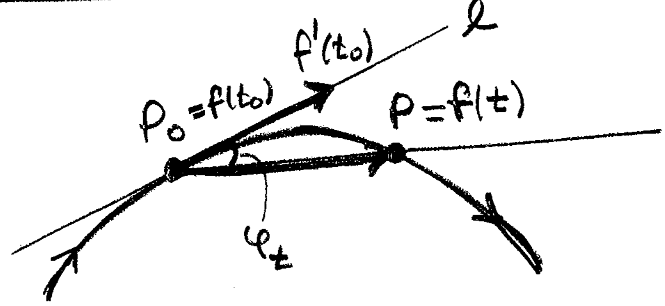
Tangenter till rymdkurvor

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ definiera en rymdkurva. Om det finns en punkt p kurvan sådan ~~att~~ det existerar en omgivning $O_\delta(p)$ som saknar andra punkter på kurvan, så är p en isolerad punkt för kurvan.



Exemplet's urartar $f(t) = (1, 0)$ till en enda punkt i $\mathbb{R}^2$, (f konstant). För isolerade punkter definierar vi inte begreppet tangent.

Låt P_0 vara en icke-isolerad punkt på kurvan $r = f(t)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Antag ~~att~~ $P_0 = f(t_0)$ och ~~att~~ $f'(t_0)$ existerar och $f'(t_0) \neq \bar{0}$.



$\overline{P_0 P} = f(t) - f(t_0)$

Definition 13. l är en tangent till kurvan $r = f(t)$ i punkten P_0 om $\varphi_t \to 0$, då $t \to t_0$.

För $t > t_0$:

$$\cos\varphi_t = \frac{f'(t_0) \bullet (f(t) - f(t_0))}{|f'(t_0)|\,|f(t) - f(t_0)|} = \frac{f'(t_0) \bullet \overbrace{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}^{\to f'(t_0)}}{|f'(t_0)|\,\underbrace{\left|\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right|}_{\to f'(t_0)}} \longrightarrow 1,$$

då $t \to t_0^+$

För $t < t_0$ fås analogt $\cos\varphi_t \to 1$, då $t \to t_0^-$.

Alltså har vi att $\cos\varphi_t \to 1$ då $t \to t_0$, vilket ger att $\varphi_t \to 0$. Vi har då bevisat följande resultat.

Sats 14. Om funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ är deriverbar i punkten t_0 med $f'(t_0) \neq \bar{0}$, så har kurvan $r = f(t)$ i punkten $P_0 = f(t_0)$ en tangent med samma riktning som **vektorn** $f'(t_0)$.

Tangentens ekvation erhålls med punkten $P_0 = f(t_0)$ och riktningsvektorn $f'(t_0)$ i parameterform:

$$x(u) = f(t_0) + u f'(t_0), \quad u \in \mathbb{R},$$

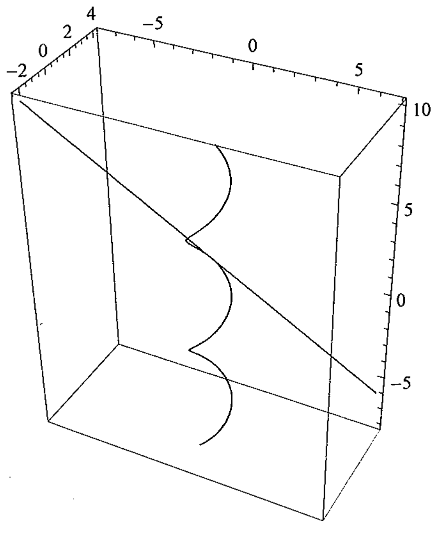
och i komponentform (i fallet $m=3$):

$$\begin{cases} x_1(u) = f_1(t_0) + u\, f_1'(t_0), \\ x_2(u) = f_2(t_0) + u\, f_2'(t_0), \\ x_3(u) = f_3(t_0) + u\, f_3'(t_0), \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exempel 32. Skruvlinjen $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$

har riktningsvektor $f'(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0, 1)$ och tangenten har parameterframställningen: $\begin{cases} x = \cos t_0 + u(-\sin t_0) \\ y = \sin t_0 + u \cos t_0 \\ z = t_0 + u \end{cases}$

Tangentens skärningspunkt med xy-planet fås för $u = -t_0$

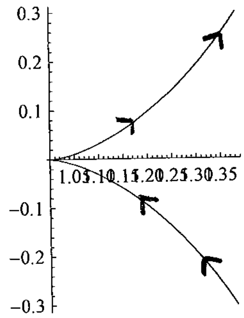


$t_0 = 2$

Definition 14. Punkten $P_0 = f(t_0)$ är en singulär punkt på kurvan $r = f(t)$ om $f'(t_0) = \bar{0}$.

Exempel 33. Betrakta den plana kurvan $r = (x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

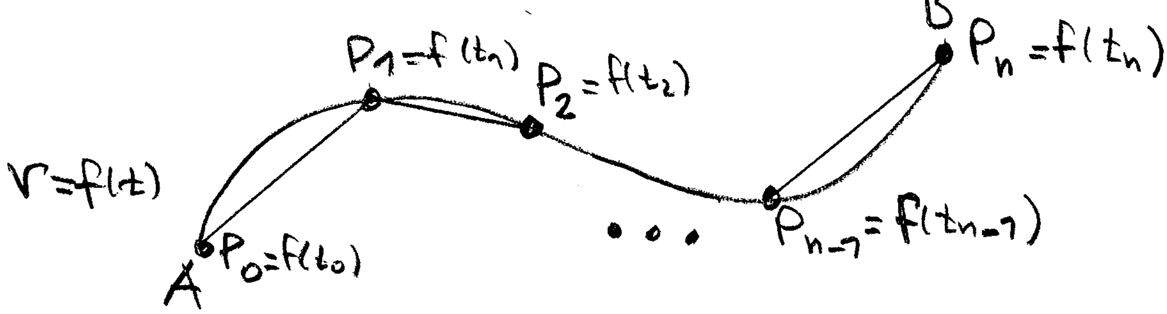


$$\begin{cases} x'(t) = t \cos t \\ y'(t) = t \sin t \end{cases}$$

$t = 0$ ger $(1,0)$ singulär punkt, en spets. Kurvan har x-axeln som tangent i $(1,0)$.

Båglängden av en rymdkurva

Betrakta kurvan $r = f(t)$ på ett parameterintervall $t \in [a, b]$. Vi inskriver ett polygondrag $P_0 P_1 \ldots P_n$ sammansatt av sträckorna $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$, där $P_0 = f(t_0) = f(a)$, $P_1 = f(t_1), \ldots, P_n = f(t_n) = f(b)$ och $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.



Definition 15. Båglängden av kurvan mellan A och B är $s = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$, där $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, och supremum tas för alla inskrivna polygondrag mellan A och B.

Sats 15. Kurvbågen $r = f(t)$, $a \le t \le b$, har båglängden
$$S = \int_a^b |f'(t)|\,dt,$$
förutsatt att derivatan är kontinuerlig på $[a,b]$.

Bevis: För $k = 1,\dots,n$ gäller
$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = \big(f_1(t_k) - f_1(t_{k-1}),\dots, f_m(t_k) - f_m(t_{k-1})\big),$$
$$|f(t_k) - f(t_{k-1})|^2 = \sum_{i=1}^{m} |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})|^2.$$
Med stöd av medelvärdessatsen gäller
$$|f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| = \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{\Delta t_k}|f_i'(\alpha_{ik})|,$$
där $\alpha_{ik} \in]t_{k-1}, t_k[$. Då erhålls:
$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| = \Delta t_k \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{m} f_i'(\alpha_{ik})^2\Big)^{1/2}}_{=:\, g(\alpha_{1k},\dots,\alpha_{mk})}$$
Längden av polygondraget blir:
$$\ell = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k \cdot g(\alpha_{1k},\dots,\alpha_{mk})$$

Å andra sidan gäller
$$I = \int_a^b |f'(t)|\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f'(t)|\,dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k |f'(\tau_k)| = \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k\, g(\tau_k,\dots,\tau_k),\ \tau_k \in]t_{k-1}, t_k[$$
med stöd av integralkalkylens medelvärdessats.

Då har vi:

$$|\ell - I| \le \sum_{k=1}^{n} |\Delta t_k| |g(\alpha_{ik}, \dots, \alpha_{mk}) - g(\tau_k, \dots, \tau_k)|$$

Funktionen g är kontinuerlig på mängden $M = \{(x_1, \dots, x_m) : a \le x_j \le b,\ j = 1, \dots, m\}$, som är en kompakt mängd i $\mathbb{R}^m$. Då ger Sats 12 att g är likformigt kontinuerlig på M.

Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$. För en tillräckligt fin indelning av $[a, b]$ existerar ~~att~~ $\delta > 0$ så ~~att~~

$$|(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}) - (\tau_k, \dots, \tau_k)| < \delta$$

$$\Rightarrow |g(\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk}) - g(\tau_k, \dots, \tau_k)| < \varepsilon.$$

För en tillräckligt fin indelning gäller då:

$$|\ell - I| \le \sum_{k=1}^{n} |\Delta t_k| \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} |\Delta t_k| = \varepsilon \cdot (b - a).$$

Detta ger att

$$I - \varepsilon(b-a) < \ell < I + \varepsilon(b-a),$$

för tillräckligt fin indelning, alltså ~~att~~

$$I - \varepsilon(b-a) < \ell \le I,$$

ty finare indelning ger större ℓ. Detta ger att

$$I = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right\},$$

där supremet tas för alla inskrivna polygondrag.

Då är $I = S$. $\square$

För en kurva $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ erhålls formeln

$$S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt,$$

för en plan kurva $r(t) = (x(t), y(t))$ formeln

$$S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

och speciellt för $y = f(x)$ på $[a, b]$ med parametriseringen

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

gäller formeln

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$