Sammansättning av funktioner

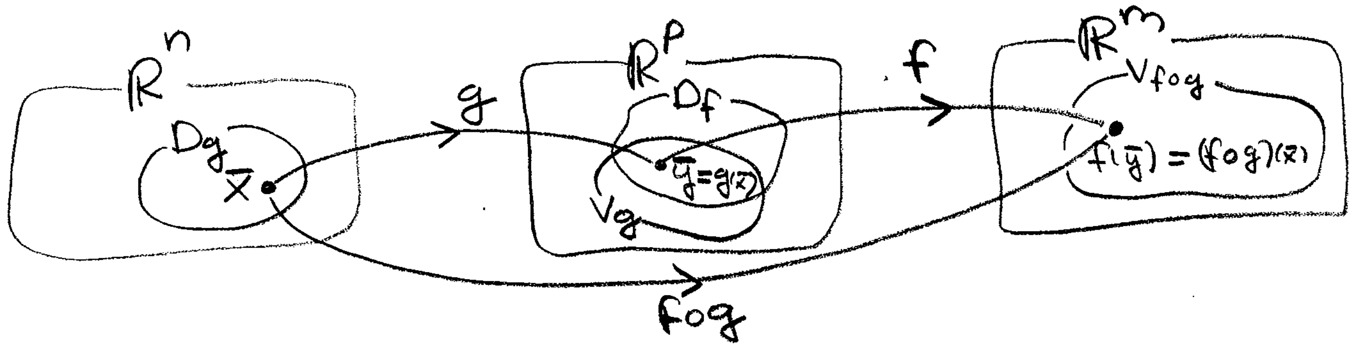
Antag att $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ och $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
Om $V_g \cap D_f \neq \emptyset$ kan vi definiera den sammansatta funktionen $f\circ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$(f\circ g)(\bar{x}) := f(g(x)),$$

med definitions- och värdemängd givna av

$$D_{f\circ g} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in D_g \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f\},$$

$$V_{f\circ g} = \{f(\bar{y}) : \bar{y} \in D_f \cap V_g\}.$$



xampel 14. Givet $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & f(u) = (u^2, u+1), \\ g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & g(x,y) = \sin(xy^2). \end{cases}$

Då är $f\circ g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given av

$$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(\sin(xy^2)) = (\sin^2(xy^2), \sin(xy^2)+1)$$

och $g\circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given av

$$(g\circ f)(u) = g(f(u)) = g(u^2, u+1) = \sin(u^2(u+1)^2).$$

Gränsvärden och kontinuitet

Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Låt $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

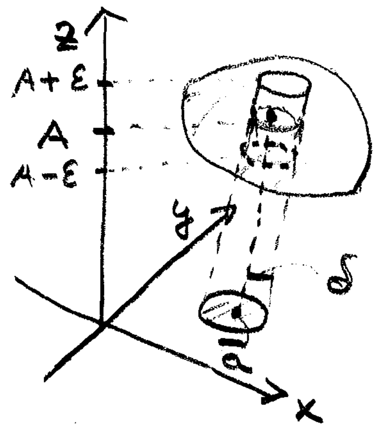
Definition 1. (Gränsvärde då $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \to \bar{a}$).
Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har gränsvärdet $\bar{A} \in \mathbb{R}^m$ då $\bar{x} \to \bar{a}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$(0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_f) \Rightarrow |f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon.$$

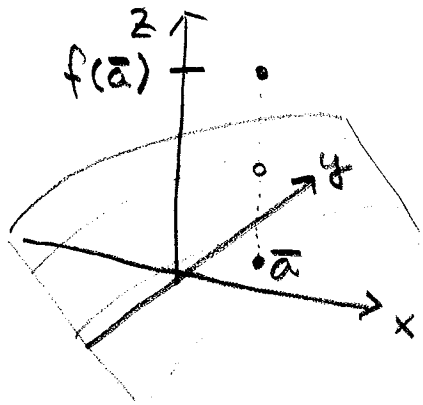
Beteckning: $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A}$ eller $f(\bar{x}) \to \bar{A}$ då $\bar{x} \to \bar{a}$.

Geometrisk tolkning för $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

Cirkelskivan $|\bar{x} - \bar{a}| < \delta$ avbildas på ett ytavsnitt som ligger innanför cylindern med höjden 2ε.



Obs! $(\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A}$ och $\bar{a} \in D_f) \not\Rightarrow f(\bar{a}) = \bar{A}$.



Definition 2. (kontinuitet). Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\bar{a} \in D_f$ om

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A} = f(\bar{a}).$$

Funktionen f är kontinuerlig om den är kontinuerlig i varje punkt $\bar{a} \in D_f$.

Undersökningen om ett gränsvärde existerar för $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kan göras med hjälp av komponentfunktionerna:

Sats 3. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$, där $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Då gäller:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A} = (A_1, \ldots, A_m) \iff \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_k(\bar{x}) = A_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Bevis: Det gäller att $|f(\bar{x}) - \bar{A}|^2 = \sum_{k=1}^{m} |f_k(\bar{x}) - A_k|^2$.

1°) Antag att $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A} = (A_1, \ldots, A_m)$, ($\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $\bar{x} \in D_f$ och $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon$)

$$|f_k(\bar{x}) - A_k|^2 \le \sum_{k=1}^{m} |f_k(\bar{x}) - A_k|^2 = |f(\bar{x}) - \bar{A}|^2$$

Alltså gäller det för $k = 1, \ldots, m$ att

$$|f_k(\bar{x}) - A_k| \le |f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon, \quad \text{så snart } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta,$$

Vilket innebär att

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_k(\bar{x}) = A_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

2°) Antag att $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f_k(\bar{x}) = A_k$, $k = 1,\dots,m$.

Tag $\varepsilon > 0$. För $k = 1,\dots,m$ gäller:

$$\exists\, \delta_k > 0 : (|\bar{x}-\bar{a}| < \delta_k \text{ och } \bar{x}\in D_f) \Rightarrow |f_k - A_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

För $|\bar{x}-\bar{a}| < \delta := \min(\delta_1,\dots,\delta_m)$ och $\bar{x}\in D_f$ gäller

$$|f(\bar{x})-\bar{A}|^2 = \sum_{k=1}^{m} |f_k(\bar{x})-A_k|^2 < m\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 = \varepsilon^2,$$

vilket ger att $|f(\bar{x})-\bar{A}| < \varepsilon$ och således

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{A}. \quad \square$$

<u>Exempel 15.</u> Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definieras för $t \neq 0$ genom $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\ln(1+2t^2)}{t^2}, \frac{1-e^t}{t}\right)$. Kan vi definiera värdet för f i $t=0$ så att f blir kontinuerlig i punkten?

<u>Lösning:</u> Bör utreda om $\lim_{t\to 0} f(t)$ existerar. Sats 3 ger att detta kan utföras komponentvis,

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \\ \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+2t^2)}{t^2} = \lim_{t\to 0} 2\cdot\frac{\ln(1+2t^2)}{2t^2} = 2\cdot 1 = 2, & \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1, \text{ och } 2t^2 \to 0\right) \\ \lim_{t\to 0} \frac{1-e^t}{t} = \lim_{t\to 0} (-1)\cdot\frac{e^t-1}{t} = (-1)\cdot 1 = -1. \end{cases}$$

<u>Svar:</u> Ja, definiera $f(0) = (1, 2, -1)$.
Då gäller det att $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$.

<u>Anmärkning!</u> Om gränsvärdet existerar är det <u>Entydigt bestämt.</u>

<u>Bevis:</u> Antag $f(\bar{x}) \to \bar{A}_1$ och $f(\bar{x}) \to \bar{A}_2$ då $\bar{x} \to \bar{a}$.

<u>Antites:</u> $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_2$. Tag $\varepsilon = \frac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| > 0$.

För $\bar{x}$ nära $\bar{a}$ med $\bar{x} \in D_f$ gäller

$$|f(\bar{x}) - \bar{A}_1| < \tfrac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| \quad \text{och} \quad |f(\bar{x}) - \bar{A}_2| < \tfrac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2|$$

$$\therefore |\bar{A}_1 - \bar{A}_2| = |(\bar{A}_1 - f(\bar{x})) + (f(\bar{x}) - \bar{A}_2)| \leq |\bar{A}_1 - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - \bar{A}_2|$$

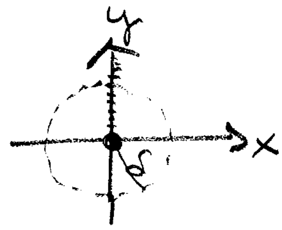
$$< \tfrac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| + \tfrac{1}{2}|\bar{A}_1 - \bar{A}_2| = |\bar{A}_1 - \bar{A}_2| \text{ ↯}$$

Alltså gäller $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$. $\square$

<u>Exempel 16.</u> Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ges av $f(x,y) = \dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$,

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Existerar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?



<u>Lösning:</u> Notera att $f(0,y) = 0$, $y \neq 0$,

Så <u>om det finns ett gränsvärde så måste det vara 0</u>, ty f antar värdet 0 i varje δ-omgivning av $(0,0)$.

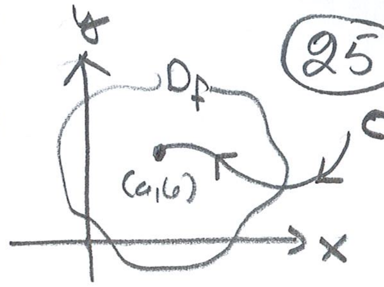
<u>Tag $\varepsilon > 0$.</u>

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| < \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

$$= |(x,y) - (0,0)|^2 < \varepsilon,$$

om $|(x,y) - (0,0)| < \sqrt{\varepsilon} =: \delta$ och $(x,y) \neq (0,0)$.

<u>Alltså:</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.



Antag att $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$.

Om det i varje δ-omgivning av (a,b) finns punkter på kurvan C som tillhör D_f gäller det att

$$\lim_{t\to\beta^-} f(x(t),y(t)) = A.$$

$$C: \begin{cases} x(t), \\ y(t), \ \alpha \le t \le \beta. \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\beta^-} (x(t),y(t)) = (a,b)$$

Med andra ord: Om vi får olika gränsvärden för $f(x(t),y(t))$ på två kurvor då $(x(t),y(t)) \to (a,b)$, så kan inte $\lim\limits_{\bar{x}\to(a,b)} f(\bar{x})$ existera.

Exempel 17. Existerar gränsvärdet då $(x,y)\to(0,0)$ för

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0) \ ?$$

Lösning: Betrakta linjerna $y=x$ och $y=0$ som båda går igenom $(0,0)$.

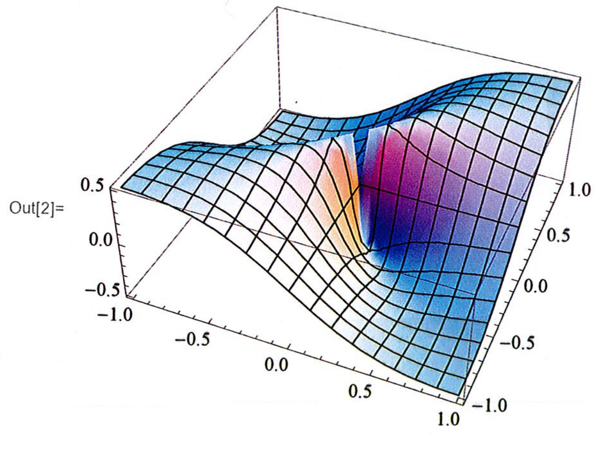
1°) $y=x$ har parametriseringen $\begin{cases} x=t, \\ y=t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

$$g(t) = f(t,t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ då } t\to 0.$$

2°) $y=0$ har parametriseringen $\begin{cases} x=t, \\ y=0, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

$$h(t) = f(t,0) = 0 \longrightarrow 0 \text{ då } t\to 0.$$

$\therefore$ Gränsvärdet saknas.



Exempel 18. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Om vi närmar oss origo på linjerna $y = k \cdot x$, $k \in \mathbb{R}$, har vi

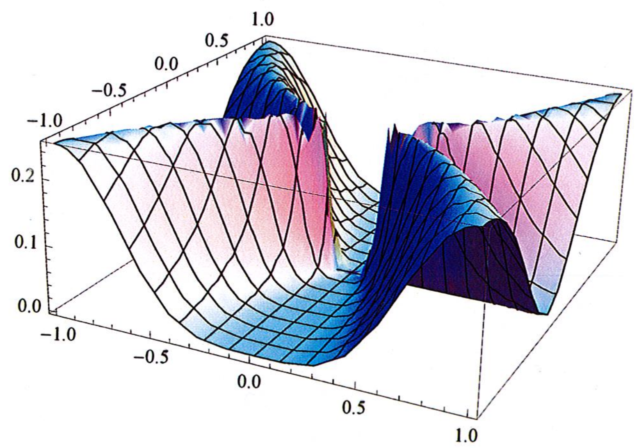
$$f(x,k\cdot x) = \frac{x^4k^2x^2}{(x^4+k^2x^2)^2} = \frac{k^2x^2}{(x^2+k^2)^2} \longrightarrow 0, \quad \text{då } x \to 0.$$

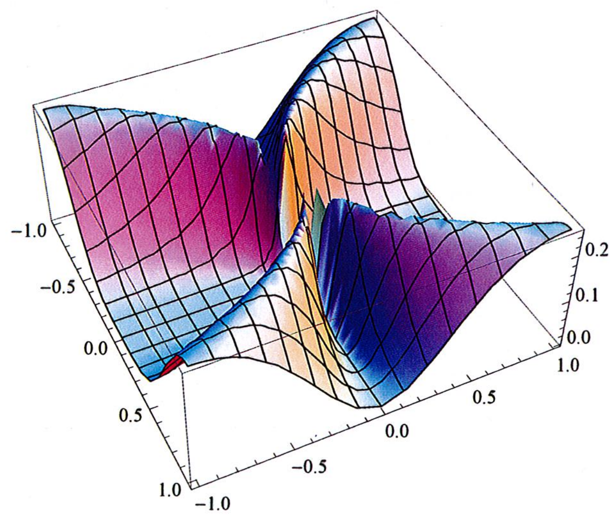
Restriktionen av f till varje rät linje genom origo har gränsvärdet 0. Men ändå saknas gränsvärdet för $f(x,y)$ då $(x,y) \to (0,0)$, ty om vi närmar oss origo på parabeln $y = x^2$ erhålls

$$f(x,x^2) = \frac{x^8}{(x^4+x^4)^2} = \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4}, \quad \text{då } x \to 0.$$

```
In[5]:= f[x_, y_] := x^4 y^2 / (x^4 + y^2)^2
        Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

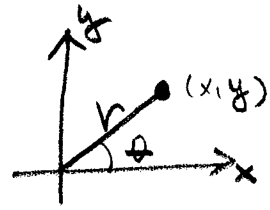
Out[10]=





När vi undersöker gränsvärden för $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ då $(x,y) \to (0,0)$ och misstänker att gränsvärdet existerar kan det många gånger vara fördelaktigt att övergå till polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \geq 0, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



Vi har då: $(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0$.

Hitta en kandidat till gränsvärde och övergå till polära koordinater.

Exempel 19. Undersök om $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ existerar.

Lösning: på linjen $y=0$ erhålls $f(x,0) = 0 \to 0$, då $x \to 0$. Kandidat till gränsvärde är 0. Övergång till polära koordinater:

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta \cdot r\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r^2\cos^3\theta \cdot \sin\theta$$

$$|f(x,y) - 0| = |r^2\cos^3\theta\sin\theta - 0| = r^2|\cos^3\theta\sin\theta|$$

$$\leq r^2 \cdot 1 = r^2 \to 0, \text{ då } r \to 0.$$

Då gäller $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$.

Om man undersöker en gränsövergång $(x,y) \to (a,b)$ kan vi använda modifierade polära koordinater:

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}, \quad r > 0, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Då gäller $(x,y) \to (a,b) \iff r \to 0$.

Exempel 20. Undersök $f(x,y) = \dfrac{xy - 2y}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}}$ då $(x,y) \to (2,0)$.

Lösning: längs linjen $y = 0$: $f(x,0) = 0 \to 0$, då $x \to 2$. Kandidat till gränsvärde är 0.

$$f(x,y) = \frac{xy - 2y}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}} = \frac{(x-2)y}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}$$

Övergå till modifierade polära koordinater

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2 = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r > 0, \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$f(x,y) = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} = r\cos\theta\sin\theta$$

$$|f(x,y) - 0| = r|\cos\theta\sin\theta| \leq r \cdot 1 \to 0, \text{ då } r \to 0.$$

Alltså gäller: $f(x,y) \to 0$, då $(x,y) \to (2,0)$.

Om vi vill undersöka om funktions $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uppförande "långt från origo" kan vi undersöka vad som inträffar då beloppet av argumentet går mot oändligt.

Definition 3. Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har gränsvärdet A då $|\bar{x}| \to \infty$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$(|\bar{x}| > \omega \text{ och } \bar{x} \in D_f) \Rightarrow |f(\bar{x}) - A| < \varepsilon.$$

Exempel 21. Det gäller att $\frac{x+y}{1+x^2+y^2} \to 0$, då $|(x,y)| \to \infty$, ty övergång till polära koordinater ger:

$$\left| \frac{x+y}{1+x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+x^2+y^2} \leq \frac{r+r}{1+r^2} = \frac{2r}{1+r^2} < \frac{2}{r} \to 0,$$

då $r \to \infty$.

Definition 4. Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har det oegentliga gränsvärdet ∞ $(-\infty)$ då $\bar{x} \to \bar{a}$ om det för varje $K \in \mathbb{R}$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$(0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_f) \Rightarrow f(\bar{x}) \underset{(< K)}{> K}.$$

Funktionen f har det oegentliga gränsvärdet ∞ $(-\infty)$ då $|\bar{x}| \to \infty$, om det för varje $K \in \mathbb{R}$ finns ett $\omega > 0$ så att

$$(|\bar{x}| > \omega \text{ och } \bar{x} \in D_f) \Rightarrow f(\bar{x}) \underset{(< K)}{> K}.$$

Räkneregler för gränsvärden

Antag att $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Då definieras funktionerna summa, skillnad, skalärprodukt och vektorprodukt som följer.

Definition 5. Antag att $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$(f \pm g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) \pm g(\bar{x}), \quad D_{f\pm g} = D_f \cap D_g,$$

$$(f \cdot g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}), \quad D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g,$$

$(m=3)$: $$(f \times g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) \times g(\bar{x}), \quad D_{f\times g} = D_f \cap D_g.$$

För $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\bar{g}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definieras funktionerna produkt och kvot.

Definition 6. Antag att $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\bar{g}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$(f\bar{g})(\bar{x}) := f(\bar{x})\,\bar{g}(\bar{x}), \quad D_{f\bar{g}} = D_f \cap D_{\bar{g}},$$

$$\left(\frac{\bar{g}}{f}\right)(\bar{x}) := \left(\frac{1}{f(\bar{x})}\right)\bar{g}(\bar{x}), \quad D_{\bar{g}/f} = D_{\bar{g}} \cap D_f \cap \{\bar{x} : f(\bar{x}) \neq 0\}$$

Sats 4. Antag att $f, g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, att $\bar{a} \in \overline{D_f \cap D_g}$ och att $f(\bar{x}) \to \bar{A}$, $g(\bar{x}) \to \bar{B}$ då $\bar{x} \to \bar{a}$. Då gäller:

1. $(f \pm g)(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} \pm \bar{B}$, då $\bar{x} \to \bar{a}$,
2. $(f \cdot g)(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} \cdot \bar{B}$, — " —,
3. $(f \times g)(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} \times \bar{B}$, — " —. $(m=3)$

<u>Bevis</u>: 1. Tag godt. $\varepsilon > 0$. Enligt antaganden finns det $\delta_1 > 0$ och $\delta_2 > 0$ så att

$$|f(\bar{x}) - \bar{A}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{för alla } \bar{x} \in D_f \text{ med } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_1,$$
$$|g(\bar{x}) - \bar{B}| < \varepsilon/2 \quad \text{—"— } \bar{x} \in D_g \text{ med } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_2.$$

För alla $\bar{x} \in D_f \cap D_g$ med $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ gäller:

$$\begin{aligned} |(f+g)(\bar{x}) - (\bar{A} + \bar{B})| &= |(f(\bar{x}) - \bar{A}) + (g(\bar{x}) - \bar{B})| \\ &\leq |f(\bar{x}) - \bar{A}| + |g(\bar{x}) - \bar{B}| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Därmed gäller $(f+g)(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} + \bar{B}$, då $\bar{x} \to \bar{a}$.
Analogt visas $(f-g)(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} - \bar{B}$, då $x \to \bar{a}$.

2. Vi gör först en uppskattning:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot \bar{B}| &= |f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot g(\bar{x}) + \bar{A} \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot \bar{B}| \\ &= |(f(\bar{x}) - \bar{A}) \cdot g(\bar{x}) + \bar{A} \cdot (g(\bar{x}) - \bar{B})| \underset{\Delta\text{-olikheten}}{\leq} |(f(\bar{x}) - \bar{A}) \cdot g(\bar{x})| + |\bar{A} \cdot (g(\bar{x}) - \bar{B})| \\ &\leq |f(\bar{x}) - \bar{A}|\,|g(\bar{x})| + |\bar{A}|\,|g(\bar{x}) - \bar{B}| \quad \text{(Cauchy-Schwartz)} \end{aligned}$$

Tag godt. $\varepsilon > 0$. Då finns det $\delta_3 > 0$: $|g(\bar{x}) - \bar{B}| < 1$ för $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_3$ och $\bar{x} \in D_g$. Då gäller för sådana $\bar{x}$:

$$|g(\bar{x})| = |\bar{B} + (g(\bar{x}) - \bar{B})| \leq |\bar{B}| + |g(\bar{x}) - \bar{B}| < |\bar{B}| + 1.$$

Vi kan välja $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$$|f(\bar{x}) - \bar{A}| < \varepsilon / (1 + |\bar{A}| + |\bar{B}|), \text{ då } \bar{x} \in D_f \text{ och } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_1,$$
$$|g(\bar{x}) - \bar{B}| < \varepsilon / (1 + |\bar{A}| + |\bar{B}|), \text{ då } \bar{x} \in D_g \text{ och } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta_2.$$

För $\bar{x} \in D_f \cap D_g$ med $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ gäller:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) - \bar{A} \cdot \bar{B}| &\leq |f(\bar{x}) - \bar{A}|\,|g(\bar{x})| + |\bar{A}|\,|g(\bar{x}) - \bar{B}| \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + |\bar{A}| + |\bar{B}|}(|\bar{B}| + 1 + |\bar{A}|) = \varepsilon. \end{aligned}$$

<u>Alltså</u>: $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) \longrightarrow \bar{A} \cdot \bar{B}$, då $\bar{x} \to \bar{a}$.

3. Vi gör en uppskattning:

$$|(\bar f\times\bar g)(\bar x)-\bar A\times\bar B| = |\bar f(\bar x)\times\bar g(\bar x)-\bar A\times\bar g(\bar x)+\bar A\times\bar g(\bar x)-\bar A\times\bar B|$$

$$\leq |(\bar f(\bar x)-\bar A)\times\bar g(\bar x)|+|\bar A\times(\bar g(\bar x)-\bar B)|$$

$$\leq |\bar f(\bar x)-\bar A||\bar g(\bar x)|+|\bar A||\bar g(\bar x)-\bar B|,$$

ty vi har för vektorprodukter: $|\bar x\times\bar y| = |\bar x||\bar y|\overbrace{\sin\theta}^{\leq 1} \leq |\bar x||\bar y|$.

Därefter fortsätter beviset som i punkt 2. □

Sats 5. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\bar g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, att $\bar a \in \overline{D_f \cap D_g}$ och att $f(\bar x) \to A$, $\bar g(\bar x) \to \bar B$ då $\bar x \to \bar a$.
Då gäller: då $\bar x \to \bar a$

4. $(f\bar g)(\bar x) \longrightarrow A\bar B$,
5. $1/f(\bar x) \longrightarrow 1/A$, om $A \neq 0$,
6. $\left(\frac{\bar g}{f}\right)(\bar x) \longrightarrow (1/A)\bar B$, om $A \neq 0$.

Bevis. 4. $|(f\bar g)(\bar x)-A\bar B| = |(f(\bar x)-A)\bar g(\bar x)+A(\bar g(\bar x)-\bar B)|$
$\leq |f(\bar x)-A||\bar g(x)|+|A||\bar g(\bar x)-\bar B|$,
och beviset är sedan analogt med punkt 2. i Sats 4.

5. $\left|\frac{1}{f(\bar x)}-\frac{1}{A}\right| = \frac{|f(\bar x)-A|}{|A||f(\bar x)|}$. Eftersom $f(\bar x)\to A$,
då $\bar x \to a$ $\exists \delta_1>0 : (\bar x\in D_f \wedge 0<|\bar x-\bar a|<\delta_1) \Rightarrow |f(\bar x)-A|<\frac{|A|}{2}$.
Då gäller: $|f(\bar x)| = |A+(f(\bar x)-A)| \geq ||A|-|f(\bar x)-A|| = |A|-|f(\bar x)-A|$
$> |A|/2$.

Tag godt. $\varepsilon>0$. $\exists \delta_2>0 : (\bar x\in D_f \wedge 0<|\bar x-\bar a|<\delta_2) \Rightarrow |f(\bar x)-A|<\frac{|A|^2}{2}\varepsilon$
Om $|\bar x-\bar a|<\delta := \min(\delta_1,\delta_2)$ och $\underbrace{\bar x\in D_f \text{ och } f(\bar x)\neq 0}_{\bar x\in D_{1/f}}$ gäller:

$$\left|\frac{1}{f(\bar x)}-\frac{1}{A}\right| < \frac{\frac{|A|^2}{2}\cdot\varepsilon}{|A|\cdot(|A|/2)} = \varepsilon.$$ Alltså: $1/f(\bar x) \to 1/A$, då $\bar x\to\bar a$.

6. Följer ur 4. och 5. då $\left(\frac{\bar g}{f}\right)(\bar x) = \left(\frac{1}{f(\bar x)}\right)\cdot\bar g(\bar x)$. □

Gränsvärden för punktföljder

En funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ definierar en **punktföljd** $(\bar{x}_p)_{p=1}^{\infty}$ eller $(\bar{x}_p)$ i $\mathbb{R}^n$.

Definition. Om $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : p > N \Rightarrow |\bar{x}_p - \bar{x}| < \varepsilon$, säger vi att **punktföljden konvergerar mot $\bar{x}$**.

Beteckning: $\lim_{p \to \infty} \bar{x}_p = \bar{x}$ eller $\bar{x}_p \to \bar{x}$, då $p \to \infty$.

$\mathbb{R}^2$:

Sats A. $\lim_{p \to \infty} \bar{x}_p = \bar{x} \Leftrightarrow \lim_{p \to \infty} x_p^{(k)} \to x_k$, $k = 1, \ldots, n$,

där $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ och $\bar{x}_p = (x_p^{(1)}, \ldots, x_p^{(n)})$.

Bevis: Analogt med beviset till Sats 3.

Definition. Följden $(\bar{x}_p)_{p=1}^{\infty}$ är **begränsad**, om det finns ~~ett~~ $M > 0 : |\bar{x}_p| \leq M$ för $p = 1, 2, \ldots$.

Sats B. (Bolzano–Weierstrass). Varje begränsad punktföljd $(\bar{x}_p)$ i $\mathbb{R}^n$ har en konvergent delföljd.

Bevis: $n = 2$. (Bevisas analogt för $n \geq 3$). Sätt $\bar{x}_p = (x_p, y_p)$.

$(\bar{x}_p)$ begränsad $\Rightarrow$ (x_p) och (y_p) begränsade följder i $\mathbb{R}$. ($|x_p| \leq |\bar{x}_p|$ och $|y_p| \leq |\bar{x}_p|$).

Bolzano-Weierstrass sats i $\mathbb{R}$ ger att (x_p) har en konvergent delföljd $(x_{p_q})_{q=1}^{\infty}$.
Delföljden $(y_{p_q})_{q=1}^{\infty}$ av (y_p) är begränsad.
B-W i $\mathbb{R}$ ger att det existerar konvergent delföljd $(y_{p_{q_r}})_{r=1}^{\infty}$ av (y_{p_q}).
Betrakta motsvarande delföljd $(x_{p_{q_r}})_{r=1}^{\infty}$ av (x_{p_q}).
Denna är konvergent, eftersom (x_{p_q}) är konvergent.

$\therefore$ $(x_{p_{q_r}}, y_{p_{q_r}})_{r=1}^{\infty}$ är en konvergent delföljd av $(\bar{x}_p)$ enligt Sats A. $\square$

Kontinuerliga funktioner

Enligt Definition 2 är $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kontinuerlig i $\bar{a} \in D_f$ om $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$, annars är f diskontinuerlig i punkten $\bar{a}$.

Exempel 22. Funktionerna $f(\bar{x}) = \bar{c}$ (= konstant), $g(\bar{x}) = \bar{x}$ och $h(\bar{x}) = |\bar{x}|$ är kontinuerliga.
Bevis: Tag godt. $\varepsilon > 0$.

a) $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| = |\bar{c} - \bar{c}| = 0 < \varepsilon$, om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < 1 =: \delta$.
$\therefore$ $f(\bar{x}) \underset{\bar{x}\to\bar{a}}{\longrightarrow} f(\bar{a})$ för varje $\bar{a}$. f är kontinuerlig.

b) $|g(\bar{x}) - g(\bar{a})| = |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon$, om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon =: \delta$
$\therefore$ $g(\bar{x}) \underset{\bar{x}\to\bar{a}}{\longrightarrow} g(\bar{a})$ för varje $\bar{a}$. g är kontinuerlig.

c) $|h(\bar{x}) - h(\bar{a})| = ||\bar{x}| - |\bar{a}|| \leq |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon$, om $0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \varepsilon =: \delta$.
$\therefore$ $h(\bar{x}) \underset{\bar{x}\to\bar{a}}{\longrightarrow} h(\bar{a})$ för varje $\bar{a}$. h är kontinuerlig.

Sats 6. Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$, och att $\bar{a} \in D_f$. Då är f kontinuerlig i $\bar{a}$ om och endast om alla komponentfunktioner $f_1, \ldots, f_m$ är kontinuerliga i $\bar{a}$.

Bevis: Påståendet följer direkt ur Sats 3. □

Exempel 23. Låt $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koordinatfunktionen $f(\bar{x}) = x_k$, $k = 1, \ldots, n$.
Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(\bar{x}) = \bar{x}$ är kontinuerlig enligt Exempel 22. Då $g(\bar{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ger Sats 6 att $f(\bar{x}) = x_k$ är kontinuerlig för $k = 1, \ldots, n$, så koordinatfunktionerna är kontinuerliga.

Exempel 24. Rätvinklig projektion av rummet på xy-planet, $(x, y, z) \to (x, y)$, är kontinuerlig, enligt Sats 6, eftersom $(x, y, z) \to x$ och $(x, y, z) \to y$ är kontinuerliga enligt Exempel 23.

Sats 7. Antag att $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga i punkten $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Då är även

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. hf
4. $f \times g$ (om $m = 3$)

kontinuerliga i $\bar{a}$. Om $h(\bar{a}) \neq 0$ är $1/h$ och $(1/h)f$ kontinuerliga i $\bar{a}$.

Bevis: Följer ur Sats 4 och Sats 5.

Exempel 25. Alla polynom är kontinuerliga.

Exempelvis: $p(x,y) = xy + x^2 + 5$

$$\left.\begin{array}{ll} q(x,y) = x & \text{kont.} \\ r(x,y) = y & \text{kont.} \\ s(x,y) = 5 & \text{kont} \end{array}\right\} \overset{\text{Sats 7}}{\Longrightarrow} \quad p = qr + q^2 + s \ \text{kontinuerlig}$$

Exempel 26. Alla rationella funktioner $\frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})}$ är kontinuerliga, (i sina definitionsmängder).

Sammansättning av kontinuerliga funktioner ger en kontinuerlig funktion:

Sats 8. Antag att $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och att $\bar{a} \in D_g$ samt $g(\bar{a}) \in D_f$.
Om g är kontinuerlig i $\bar{a}$ och f i punkten $g(\bar{a})$, så är $(f \circ g): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kontinuerlig i $\bar{a}$.

Bevis: Tag $\varepsilon > 0$. Då f är kont. i $g(\bar{a})$ existerar ett $\delta > 0$: $(0 < |g(\bar{x}) - g(\bar{a})| < \delta,\ g(\bar{x}) \in D_f) \Rightarrow |f(g(\bar{x})) - f(g(\bar{a}))| < \varepsilon$.

Då g är kontinuerlig i $\bar{a}$ finns det ett $\delta' > 0$ så att $(0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta',\ \bar{x} \in D_g) \Rightarrow |g(\bar{x}) - g(\bar{a})| < \delta$.

Då $D_{f \circ g} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in D_g \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f\}$ får vi att

$$\begin{aligned} (0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta' \text{ och } \bar{x} \in D_{f \circ g}) &\Rightarrow (|g(\bar{x}) - g(\bar{a})| < \delta \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f) \\ &\Rightarrow |f(g(\bar{x})) - f(g(\bar{a}))| < \varepsilon, \end{aligned}$$

och därmed är $f \circ g$ kontinuerlig i $\bar{a}$. $\square$

Exempel 26. Enligt Exempel 22 är $f(\bar{x}) = |\bar{x}|$ en kontinuerlig funktion från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}$.
Om $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en kontinuerlig funktion så ger Sats 8 att $(f \circ g)(\bar{x}) = f(g(\bar{x})) = |g(\bar{x})|$ är en kontinuerlig funktion.

Exempel 27. $f(x,y) = \cos(xy)$ är en kontinuerlig funktion, ty då $h(x,y) = xy$ och $g(x) = \cos x$ är kontinuerliga, så är

$$(g \circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = \cos(xy)$$

kontinuerlig.

Sats C. Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\bar{a} \in D_f$ och att punktföljden $(\bar{x}_p)_{p=1}^{\infty}$ i D_f konvergerar mot $\bar{a}$.
Då gäller: $\lim_{p \to \infty} f(\bar{x}_p) = f(\bar{a})$.

Bevis: Tag $\varepsilon > 0$. Då f är kontinuerlig i a gäller:

$$\exists \delta > 0 : (0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_f) \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon.$$

Vidare då $\bar{x}_p \to \bar{a}$ då $p \to \infty$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : p > N \Rightarrow |\bar{x}_p - \bar{a}| < \delta.$$

Alltså:

$$\exists N \in \mathbb{N} : p > N \Rightarrow (|\bar{x}_p - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x}_p \in D_f) \Rightarrow |f(\bar{x}_p) - f(\bar{a})| < \varepsilon.$$

Men detta betyder att $\lim_{p \to \infty} f(\bar{x}_p) = f(\bar{a})$. $\square$