Flerdimensionell analys, v.2

Flerdimensionell analys, del I, 5 sp, 272023

Flerdimensionell analys, del II, 5 sp, 272024

Kurstider: v. 2 – v. 20 (8.1 – 14.5)

- Föreläsningar : Må 10.15 - 12 och O 13.30 - 15 i föreläsningssal Lindelöf.
- Demonstrationer: To 13.30 - 15 i Lindelöf, börjande vecka 3.
  Ikryssning av räknade hemtal (minst 50% bör räknas). Bonuspoäng till tentamen 60%, 75% och 90% lösta hemtal ger 1, 2 respektive 3 bonuspoäng .

(Rektors beslut: 10 - 12 = 10.15 - 11.45 och 13 - 15 = 13.30 – 15.00)

Kurslitteratur: Petermann, E., *Analytiska metoder II,* Studentlitteratur, 2002 (4. Upplagan) och föreläsningsanteckningar. (Bredvidläsningsmaterial: Eriksson, F., *Flerdimensionell analys,* Studentlitteratur).

Kurshemsida: http://www.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/flerdim/

Kursmapp: Kopior av kursmaterial i datasalen Geologicum 127, (bredvid sal Lindelöf).

Kurstenter: Tent i del I: M 12.3 kl. 9-13 i Geologicum Aud I. Tent i del II: O 16.5 kl. 9-13 i Geologicum Aud I.

Kursinnehåll

- Vektorrummet R^n
- Avbildningar från R^m till R^n
- Gränsvärden och kontinuitet
- Partiella derivator, tangentplan, gradienter, funktionalmatriser, differentierbara funktioner, kedjeregeln, riktningsderivata
- Inversa funktioner och implicit givna funktioner

- Taylors formel för funktioner av flera variabler
- Extremvärdesproblem med och utan bivillkor
- Integralkalkyl för funktioner av flera variabler, dubbelintegraler, generaliserade dubbelintegraler, trippelintegraler
- Integralkalkyl för vektorfält, kurvintegraler, Greens formel, ytintegraler

Euklidiska vektorrummet $\mathbb{R}^n$ ①

Betrakta mängden av ordnade n-tiplar:

$$\mathbb{R}^n := \{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}.$$

Mängden $\mathbb{R}^n$ försedd med addition och multiplikation med reell skalär bildar ett vektorrum. För $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ definieras

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

och

$$c\bar{x} = c(x_1, \ldots, x_n) := (cx_1, \ldots, cx_n).$$

Additionen är kommutativ och associativ.
Multiplikation med skalär är associativ.

Nollvektorn

$$\overline{0} := (0, \ldots, 0)$$

är det neutrala elementet med avseende på addition.

Den additiva inversen till $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ges av

$$-\overline{x} := (-1)\cdot\overline{x} = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Subtraktion definieras genom

$$\overline{x} - \overline{y} := \overline{x} + (-\overline{y}) = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n).$$

Elementen i $\mathbb{R}^n$ kallas punkter eller vektorer.

(2)

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$ blir <u>euklidiskt</u> om vi inför <u>skalärprodukten</u> (inre produkten)

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,.$$

Punkterna i $\mathbb{R}^n$ kan tolkas som <u>$n \times 1$-matriser</u>

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

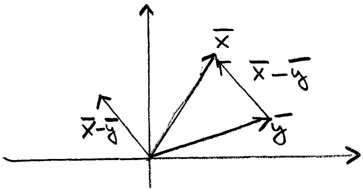
varvid $\underline{\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x}^T \bar{y}}$.

Beloppet (längden) av en vektor $\bar{x}$ ges av

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} = \sqrt{\bar{x}^T\bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

och avståndet mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är

$$|\bar{x}-\bar{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}.$$



$n = 2$

3

Sats 1 (Cauchy-Schwartz' olikhet)

För alla vektorer $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

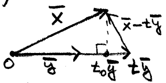
$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}| \qquad (|\bar{x}^T\bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|)$$

med likhet om och endast om $\bar{x} = \lambda \bar{y}$ eller $\bar{y} = \bar{0}$.

Bevis: Gäller om $\bar{x} = \bar{0}$ eller $\bar{y} = \bar{0}$. Antag $\bar{x} \neq \bar{0}, \bar{y} \neq \bar{0}$.

SåH: $\varphi(t) = |\bar{x} - t\bar{y}|^2 = (\bar{x} - t\bar{y}) \cdot (\bar{x} - t\bar{y})$

$$= \bar{x} \cdot \bar{x} - 2t\,\bar{x} \cdot \bar{y} + t^2\,\bar{y} \cdot \bar{y}$$



$\varphi(t)$ 2:a grads polynom i t, minimum då $\varphi'(t) = 0$,

$$\varphi'(t) = -2\,\bar{x} \cdot \bar{y} + 2t\,\bar{y} \cdot \bar{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{y} \cdot \bar{y}} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{y}|^2} =: t_0.$$

$$\therefore\ 0 \le \varphi(t_0) = |\bar{x}|^2 - 2\cdot\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{y}|^2}(\bar{x}\cdot\bar{y}) + \frac{(\bar{x}\cdot\bar{y})^2}{|\bar{y}|^4}\cdot|\bar{y}|^2$$
$$= |\bar{x}|^2 - \frac{(\bar{x}\cdot\bar{y})^2}{|\bar{y}|^2}.$$

<u>Alltså</u>: $(\bar{x}\cdot\bar{y})^2 \le |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2$ och således $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \le |\bar{x}||\bar{y}|$, Likhet erhålls om $\bar{y}=\bar{0}$ eller om $\varphi(t_0)=0$ dvs. $\bar{x}=t_0\bar{y}$. $\square$

Ur $|\bar{x}\cdot\bar{y}| \le |\bar{x}||\bar{y}|$ följer att $-1 \le \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|} \le 1$, då $\bar{x},\bar{y} \ne \bar{0}$.
Vi kan då definiera <u>vinkeln θ mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$</u> genom

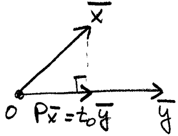
$$\cos\theta = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \frac{\bar{x}^T\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}, \quad \text{då } \bar{x},\bar{y} \ne \bar{0}.$$

Om $\bar{x}\cdot\bar{y}=0$ är vektorerna <u>ortogonala</u> och om $\bar{x},\bar{y}\ne\bar{0}$ är de då <u>vinkelräta</u> $(\cos\theta=0)$.

4

Den ortogonala projektionen av en vektor $\bar{x}$ på vektorn $\bar{y}$ ges av

$$P\bar{x} = t_0\bar{y} = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{y}|^2}\bar{y}.$$



En vektor $\bar{x}$ är en enhetsvektor om $|\bar{x}| = 1$.

I $\mathbb{R}^n$ är enhetsvektorerna
$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1,0,\dots,0) \\ \bar{e}_2 = (0,1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ \bar{e}_n = (0,\dots\dots,0,1) \end{cases}$$

parvis ortogonala, ($e_i \perp e_j$, $i \neq j$), och bildar en ortonormal bas i $\mathbb{R}^n$. Varje vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$.

Sats 2 (Triangelolikheten). För alla $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|,$$

med likhet om och endast om $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är parallella och lika riktade.

Bevis:
$$|\bar{x} + \bar{y}|^2 = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{x} + 2\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{y}$$
$$\leq |\bar{x}|^2 + 2|\bar{x} \cdot \bar{y}| + |\bar{y}|^2 \underset{(\text{Sats } 7)}{\leq} |\bar{x}|^2 + 2 \cdot |\bar{x}||\bar{y}| + |\bar{y}|^2$$
$$= (|\bar{x}| + |\bar{y}|)^2.$$

Alltså gäller $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$. Vidare har vi att

$$|\bar{x}| = |(\bar{x} + \bar{y}) + (-\bar{y})| \leq |\bar{x} + \bar{y}| + |-\bar{y}| = |\bar{x} + \bar{y}| + |\bar{y}|,$$

så $|\bar{x}| - |\bar{y}| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$. Analogt fås att $|\bar{y}| - |\bar{x}| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$ och då gäller $||\bar{x}| - |\bar{y}|| \leq |\bar{x} + \bar{y}|$. $\square$

5

För $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$|\lambda \bar{x}|^2 = (\lambda \bar{x}) \cdot (\lambda \bar{x}) = \lambda^2 (\bar{x} \cdot \bar{x}) = \lambda^2 |\bar{x}|^2$$

alltså har vi att $|\lambda \bar{x}| = |\lambda| |\bar{x}|$. Sammanfattningsvis har vi för beloppet egenskaperna

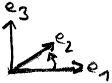
$$|\bar{x}| \geq 0, \quad \text{med likhet om och endast om } \bar{x} = \bar{0},$$

$$|\lambda \bar{x}| = |\lambda| |\bar{x}|, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Vektorprodukter i $\mathbb{R}^3$

Antag att basvektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för $\mathbb{R}^3$ bildar ett högersystem: "Den minsta vridning som överför e_1 på e_2 sker moturs betraktat från spetsen av e_3".



Alternativt: "Den minsta vridning som överför e_1 på e_2 får en vanlig högergängad skruv att röra sig i den riktning som representeras av e_3".

Vektorprodukten av $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ betecknad $\bar{x} \times \bar{y}$ och definierad av

$$\bar{x} \times \bar{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

6

En minnesregel för beräkning av $\overline{x} \times \overline{y}$ ges av utvecklingen av nedanstående formella determinant efter den första kolonnen:

$$\overline{x} \times \overline{y} = \begin{vmatrix} e_1 & x_1 & y_1 \\ e_2 & x_2 & y_2 \\ e_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

Exampel 1. Beräkna vektorprodukten $\overline{x} \times \overline{y}$ för vektorerna $\overline{x} = (1, 2, -2)$ och $\overline{y} = (-1, 2, 2)$.

Lösning:

$$\overline{x} \times \overline{y} = \begin{vmatrix} e_1^{+} & 1 & -1 \\ e_2^{-} & 2 & 2 \\ e_3^{+} & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot e_2$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} e_3 = (4-(-4)) \cdot e_1 - (2-2)\, e_2$$

$$+ (2-(-2)) \cdot e_3$$

$$= \underline{\underline{(8, 0, 4)}}$$

Notera att $(\overline{x} \times \overline{y}) \cdot \overline{x} = 0$ och $(\overline{x} \times \overline{y}) \cdot \overline{y} = 0$, så $\overline{x} \times \overline{y}$ är vinkelrät mot $\overline{x}$ och $\overline{y}$.

7

Med hjälp av definitionen kontrollerar man lätt att följande egenskaper gäller för vektorprodukten:

$$\bar{x} \times \bar{y} = -\bar{y} \times \bar{x} \qquad \text{(antikommutativ)},$$
$$\bar{x} \times (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \times \bar{y} + \bar{x} \times \bar{z} \qquad \text{(distributiv)},$$
$$\bar{x} \times c\bar{y} = c(\bar{x} \times \bar{y}) \quad \text{för alla } c \in \mathbb{R}.$$

Den skalära trippelprodukten av vektorerna $\overline{u}, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$ definieras som $\overline{u} \bullet (\overline{x} \times \overline{y})$.

Om $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ser vi direkt från minnesregeln för beräkning av $\overline{x} \times \overline{y}$ att

$$\overline{u} \bullet (\overline{x} \times \overline{y}) = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \pm V(\overline{u}, \overline{x}, \overline{y}),$$

där $V(\overline{u}, \overline{x}, \overline{y})$ betecknar volymen av den parallellepiped som har sidorna $\overline{u}$, $\overline{x}$ och $\overline{y}$. och tecknet är "+" om dessa bildar ett höger-system (annars "−").

Ur ovanstående formel härleder vi lätt två egenskaper för vektorprodukten.

1. Vektorn $\overline{x} \times \overline{y}$ är vinkelrät mot både $\overline{x}$ och $\overline{y}$, ty om vi väljer $\overline{u} = \overline{x}$ eller $\overline{u} = \overline{y}$ så har determinanten två identiska kolumner och är därmed lika med noll.

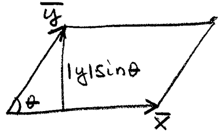
2. Om $\overline{x} \times \overline{y} \neq \overline{0}$ bildar $\overline{x}, \overline{y}$ och $\overline{x} \times \overline{y}$ i denna ordning ett högersystem, ty om $\overline{x} \times \overline{y} = (a_1, a_2, a_3)$ har vi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_1 \\ x_2 & y_2 & a_2 \\ x_3 & y_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & y_1 \\ a_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (\overline{x} \times \overline{y}) \cdot (\overline{x} \times \overline{y}) > 0.$$

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

8

3. Vidare gäller $|\bar{x} \times \bar{y}| = |x||y| \sin\theta$, där θ betecknar vinkeln mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$. Detta betyder att $|\bar{x} \times \bar{y}|$ är arean av den parallellogram som har sidorna $\bar{x}$ och $\bar{y}$.



Bevis: Med vår minnesregel för beräkning av $\overline{x} \times \overline{y}$ erhålls

$$|\overline{x} \times \overline{y}|^2 = (\overline{x} \times \overline{y}) \cdot (\overline{x} \times \overline{y}) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \ldots = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2$$

$$= |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2 - |\overline{x} \cdot \overline{y}|^2 = |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2 \left(1 - \frac{|\overline{x} \cdot \overline{y}|^2}{|\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2}\right)$$

$$= |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2 (1 - \cos^2\theta) = |\overline{x}|^2 |\overline{y}|^2 \sin^2\theta$$

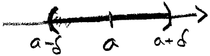
Alltså gäller: $|\overline{x} \times \overline{y}| = |\overline{x}| |\overline{y}| \sin\theta$. $\square$

Topologiska begrepp i $\mathbb{R}^n$

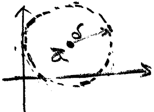
9

De punkter $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ som ligger på ett avstånd mindre än δ från $\bar{a}$ utgör en omgivning, (δ-omgivning), $O_\delta(\bar{a})$ till $\bar{a}$:

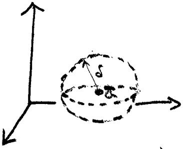
$$O_\delta(\bar{a}) := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \}, \quad \delta > 0.$$



$\mathbb{R}^1$, öppet intervall



$\mathbb{R}^2$, öppen cirkelskiva



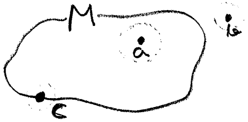
$\mathbb{R}^3$, öppet klot

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$

En punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är en <u>inre punkt</u> till mängden $M \subseteq \mathbb{R}^n$ om $\exists \delta > 0 : O_\delta(\bar{a}) \subseteq M$.

En punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är en <u>yttre punkt</u> till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ om $\exists \delta > 0 : O_\delta(\bar{a}) \cap M = \emptyset$. (Då är $\bar{a}$ en inre punkt till $CM := \mathbb{R}^n \setminus M$).

En punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är en <u>randpunkt</u> till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ om $\forall \delta > 0 : M \cap O_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset$ och $CM \cap O_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset$.



a inre punkt, b yttre punkt
och c randpunkt till M.

(10)

Mängden av alla inre punkter till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ betecknas M°,

$$M^\circ := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \text{ är en inre punkt till } M\}.$$

Det gäller att $M^\circ \subseteq M$, ty $O_\delta(\bar{a}) \subseteq M \Rightarrow \bar{a} \in M$.

Mängden av alla randpunkter till $M \subseteq \mathbb{R}^n$ betecknas ∂M,

$$\partial M := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \text{ är en randpunkt till } M\}.$$

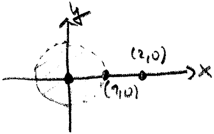
Mängden $\overline{M} := M \cup \partial M$ kallas höljet av M.

Mängden M är sluten om $\partial M \subseteq M$, dvs. $\overline{M} = M$.

Mängden M är öppen om $M \subseteq M^\circ$, dvs. $M = M^\circ$.

Exempel 2. Låt $M \subseteq \mathbb{R}^2$ definieras av

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\} \cup \{(1,0),(2,0)\}.$$



Då gäller:

$$M^\circ = \{(x,y) : x^2+y^2<1\},$$

$$\partial M = \{(x,y) : x^2+y^2=1\} \cup \{(2,0)\},$$

$$\overline{M} = M \cup \partial M = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\} \cup \{(2,0)\}.$$

$M \neq M^\circ$ och $M \neq \overline{M}$, så M är varken sluten eller öppen.

(11)

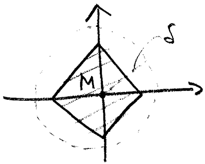
Exempel 3. En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen om och endast om $\complement M$ är en sluten mängd.

Bevis: (Notera att $\partial M = \partial \complement M$). Det gäller att

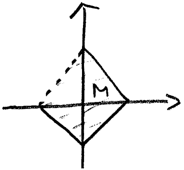
$$M \text{ är öppen} \iff M \subseteq M^\circ \iff \partial M \subseteq \complement M$$
$$\iff \partial \complement M \subseteq \complement M \iff \complement M \text{ är sluten.} \quad \square$$

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad om det existerar en δ-omgivning $O_\delta(\bar{0})$ av $\bar{0}$ så dan att $M \subseteq O_\delta(\bar{0})$. (Då är $|\bar{x}| < \delta$ för alla $\bar{x} \in M$).

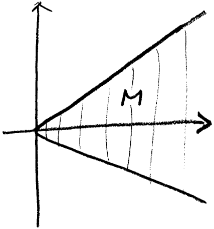
Om en mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är begränsad och sluten kallas den kompakt.



$\partial M \subseteq M$, sluten
$M \subseteq O_\delta(\bar{0})$, begränsad
M kompakt.



M begränsad, ej sluten.
Ej kompakt



M sluten, ej begränsad,
Ej kompakt.

(12)

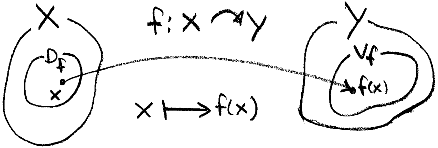
Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Låt f vara en funktion (avbildning) från mängden X till mängden Y, betecknat: $f : X \to Y$.

De punkter i X som f är definierad i utgör f:s definitionsmängd, betecknad D_f.

Värdemängden för f, betecknad V_f, är de värden i Y som antas av funktionen f,

$$V_f := \{ y \in Y : \exists\, x \in D_f : f(x) = y \} = \{ f(x) : x \in D_f \}.$$



För avbildningar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har vi

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

och bilden av $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ under f är en vektor i $\mathbb{R}^m$:

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(x)),$$

där komponentfunktionerna $f_1, \ldots, f_m$ är reellvärda funktioner av n variabler,

$$f_k(\bar{x}) = f_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, \ldots, m,$$

alltså $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, m$.

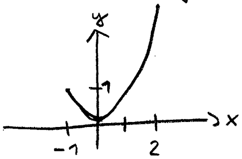
13

För en avbildning $f: X \to Y$ definierar vi grafen för f som mängden G_f given av

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\},$$

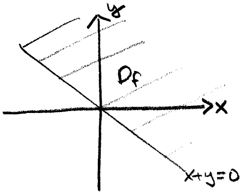
som då är en delmängd av produktmängden $X \times Y$. Mängden G_f kan i vissa fall visualiseras i ~~ett~~ 2- eller 3-dimensionellt koordinatsystem.

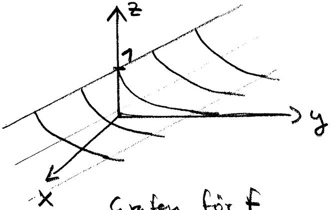
Exempel 4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2$, $D_f = [-1, 2]$.



Mängden G_f, grafen för f.

Exempel 5. (funktionsytor) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ges av $f(x,y) = e^{-x-y}$, $D_f = \{(x,y) : x+y \geq 0\}$. Kan framställas i ett 3-dimensionellt koordinatsystem med $z = f(x,y) = e^{-x-y}$. Observera att på linjerna $x+y=k$ gäller $z = e^{-k}$:





Grafen för f

(Praktisk tolkning: Bestäm kurvan $z = f(0,y) = e^{-y}$ i yz-planet och translatera (förskjut) denna.)

74

Om funktionsytan är av formen

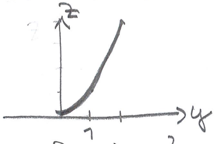
$$z = f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$$

Så är den rotationssymmetrisk kring z-axeln.

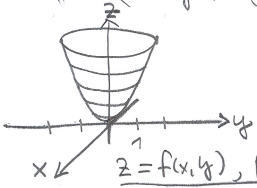
Då kan vi i yz-planet, för $y \geq 0$, rita ut kurvan $z = f(0,y)$ och rotera denna kring z-axeln för att skapa ytan $z = f(x,y)$.

Exempel 6. Rita en bild av ytan $z = x^2+y^2$.

Vi har $z = f(x,y) = x^2+y^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 \; (= g(\sqrt{x^2+y^2}))$



$z = f(0,y) = y^2, \; y \geq 0$



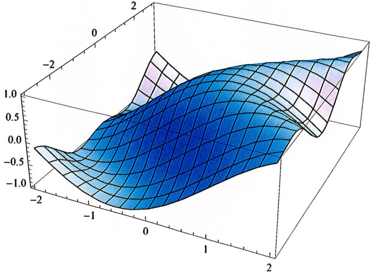
$z = f(x,y)$, paraboloid

Ofta är det svårt att skissera en yta $z = f(x,y)$, då kan ett symboliskt programpaket användas.

Exempel 7. Rita ytan $z = f(x,y) = \sin(x + \cos y)$, då $-2 \le x \le 2$ och $-3 \le y \le 3$, i Mathematica.

```
In[1]:= f[x_, y_] := Sin[x + Cos[y]]

In[3]:= Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -3, 3}]
```

Out[3]=



15

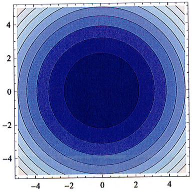
Ett annat sätt att visualisera avbildningar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är med nivåkurvor. Vi löser ekvationen

$$f(x,y) = c$$

för lämpligt valda värden på c och ritar motsvarande kurvor i ett xy-plan. I exempel 6 med $f(x,y) = x^2+y^2$ blir nivåkurvorna cirklar $x^2+y^2=c$ med radie $\sqrt{c}$. Ju tätare nivåkurvorna ligger, desto brantare är funktionsgrafen. (Jämför topografiska kartor). I Mathematica:

```
In[4]:= ContourPlot[x^2 + y^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

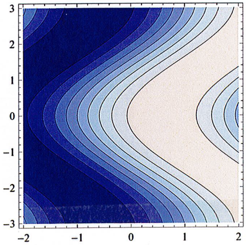
Out[4]=



Nivåkurvorna för $f(x,y) = \sin(x+\cos y)$ i exempel 7:

In[5]:= `ContourPlot[Sin[x + Cos[y]], {x, -2, 2}, {y, -3, 3}]`

Out[5]=



76

Avbildningar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ kan visualiseras som parameterkurvor i planet,

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t), y(t)),$$

eller

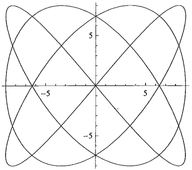
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Exempel 8. Bowditch kurva (1815):

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \left(9 \sin\left(\tfrac{3}{4}t\right), 8 \sin t\right), \quad 0 \le t \le 8\pi.$$

```
In[7]:= x[t_] := 9 Sin[3 t / 4]; y[t_] := 8 Sin[t]

In[11]:= ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 8 Pi}]
```

Out[11]=



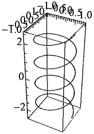
Avbildningar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ kan visualiseras som <u>parmeterkurvor i rummet</u>,

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

<u>Exampel 9</u>. Skruvlinjen $\bar{r} = \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/5)$, $-4\pi \le t \le 4\pi$, ligger på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$.

```
In[28]:= x[t_] := Cos[t]; y[t_] := Sin[t]; z[t_] := t / 5

In[30]:= ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, -4 Pi, 4 Pi}]
```

Out[30]=



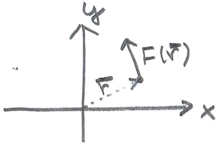
Avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

17

En avbildning $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan tolkas som ett vektorfält, (kraftfält), i planet

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\bar{r}) = \mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

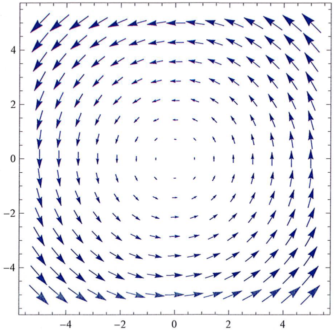
Det kan visualiseras så att man utgående från ortsvektorn $\bar{r} = (x,y)$ ritar ut vektorn $\mathbf{F}(x,y)$.



Exempel 70. Fältet $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (-y,x)$ "Vrider vektorn (x,y) moturs vinkeln $\pi/2$".
I Mathematica görs detta med VectorPlot:

```
In[1]:= P[x_, y_] := -y; Q[x_, y_] := x

In[2]:= VectorPlot[{P[x, y], Q[x, y]}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

Out[2]=



18

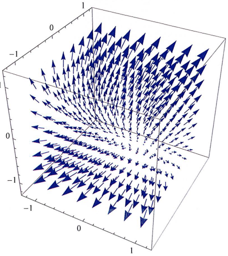
På analogt sätt kan en avbildning $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tolkas som ett vektorfält i rymden

$$F = F(\bar{r}) = F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

Exempel 11. Fältet $F(x,y,z) = (x, 2(y+z), \frac{z}{2}+1)$ kan visualiseras med VectorPlot3D

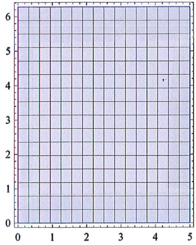
```
In[1]:= P[x_, y_, z_] := x; Q[x_, y_, z_] := 2 (y + z); R[x_, y_, z_] := z / 2 + 1

In[4]:= VectorPlot3D[{P[x, y, z], Q[x, y, z], R[x, y, z]},
          {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

Out[4]=



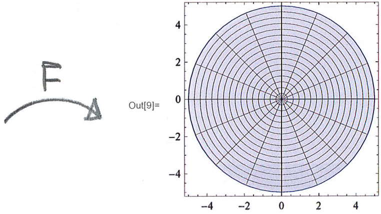
Avbildningar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan tolkas som koordinatbyten, eller deformation av området.

Exempel 12. Övergång från polära koordinater till kartesiska koordinater $F(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$



rθ-planet

```
In[9]:= ParametricPlot[{r Cos[t], r Sin[t]}, {r, 0, 5}, {t, 0, 2 Pi}]
```



xy-planet

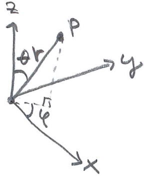
19

En avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kan tolkas som en avbildning av ett område i planet på en yta i rummet,

$$F(\bar{r}) = F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Exempel 13. Sfären $x^2+y^2+z^2=25$ kan framställas med sfäriska koordinater som

$$\begin{cases} x = 5\sin\theta\cos\varphi, \\ y = 5\sin\theta\sin\varphi, \\ z = 5\cos\theta. \end{cases}$$

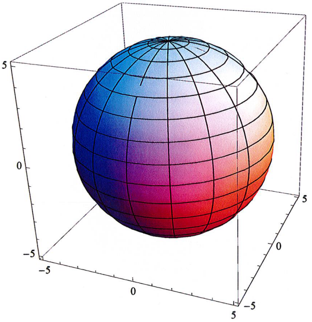


Sfäriska koordinater (r,θ,φ)

Ytan kan visualiseras i Mathematica med ParametricPlot3D:

In[5]:=
```
ParametricPlot3D[
  {5 Sin[t] Cos[fi], 5 Sin[t] Sin[fi], 5 Cos[t]}, {t, 0, Pi}, {fi, 0, 2 Pi}]
```

Out[5]=



20

Sammansättning av funktioner

Antag att $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ och $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

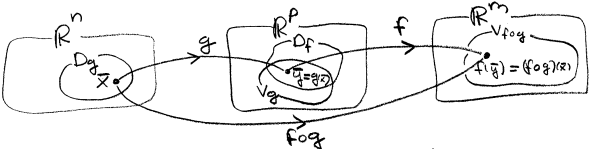
Om $V_g \cap D_f \neq \emptyset$ kan vi definiera den sammansatta funktionen $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$(f \circ g)(\bar{x}) := f(g(x)),$$

med definitions- och värdemängd givna av

$$D_{f\circ g} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \ \bar{x} \in D_g \text{ och } g(\bar{x}) \in D_f \},$$

$$V_{f\circ g} = \{ f(\bar{y}) : \ \bar{y} \in D_f \cap V_g \}.$$



Exempel 14. Givet
$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & f(u) = (u^2, u+1), \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & g(x,y) = \sin(xy^2). \end{cases}$$

Då är $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given av

$$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(\sin(xy^2)) = (\sin^2(xy^2), \sin(xy^2)+1)$$

och $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given av

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(u^2, u+1) = \sin(u^2(u+1)^2).$$